TEMA 65: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA. CARACTERÍSTICAS Y TRATAMIENTO. LAS DISTRIBUCIONES BINIOMIAL Y DE POISSON. APLICACIONES.

TEMA 65: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA. CARACTERÍSTICAS Y TRATAMIENTO. LAS DISTRIBUCIONES BINIOMIAL Y DE POISSON. APLICACIONES.

La Estadística en sus orígenes se limitaba fundamentalmente a un conocimiento de la demografía y de los problemas económicos.

Fue a partir del siglo XVII cuando comenzaron a perfilarse los conceptos relacionados con las bases y los medios de los estudios estadísticos, transformando la Estadística en una ciencia susceptible no solamente de describir la realidad, sino también de modelizarla utilizando métodos básicamente matemáticos.

A principios del siglo XX toda la teoría relacionada con la Estadística y el Cálculo de Probabilidades se plasmó en una nueva rama: la Estadística Matemática.

El Cálculo de probabilidades se ocupa del estudio de los fenómenos aleatorios, y busca su modelización matemática.

Un experimento aleatorio se describe a través de su espacio muestral; asignando y calculando probabilidades a sucesos elementales y compuestos. Si el espacio muestral es de tipo cuantitativo, parece lógico y necesario definir una función que asocie a cada resultado o suceso del experimento un número. Esta función será la llamada variable aleatoria. De esta forma podremos estudiar el comportamiento aleatorio de los sucesos de un experimento. Este será el objetivo de las variables aleatorias, y a ellas dedicaremos este tema. Para ello seguiré el índice ya expuesto.

I. GENERALIDADES SOBRE VARIABLES ALEATORIAS

Estudiaremos aquí los conceptos de variable aleatoria, distribución de probabilidad y función de distribución de una variable aleatoria.

Pero antes de nada definiremos el denominado σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$:

El σ-álgebra de Borel, $\mathcal{B}$, es el σ-álgebra generado por todos los intervalos de la forma $(x,y]$ con $x,y \in \mathbb{R}$. A todos los conjuntos que pertenecen a dicha σ-álgebra se les denomina conjuntos de Borel o borelianos.

Definamos formalmente ***variable aleatoria***:

Sea $(\Omega,\mathcal{A})$ un espacio probabilizable asociado a un experimento aleatorio. Se define una variable aleatoria (v.a.), representándose por X, como la función de Ω en $\mathbb{R}$ que verifica que la imagen inversa de todo conjunto de Borel pertenece al σ-álgebra $\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} X:\Omega &\to \mathbb{R} \\ w &\mapsto X(w) \ : \ X^{-1}(B)\in\mathcal{A},\ \forall B\in\mathcal{B} \end{aligned}$$

Veamos un resultado que nos caracteriza las variables aleatorias:

<u>Teorema de caracterización:</u>

Sea $(\Omega,\mathcal{A})$ un espacio probabilizable y $X:\Omega\to\mathbb{R}$ una función. Se verifica que X es una v.a si y sólo si la imagen inversa por X de los intervalos de la forma $(-\infty,x]$ pertenece al σ-álgebra $\mathcal{A}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Una v.a X definida en un espacio probabilístico $(\Omega,\mathcal{A},P)$ debe suministrar de forma natural la transferencia de la probabilidad P definida para los sucesos de $\mathcal{A}$, a una probabilidad definida sobre los valores reales que ha tomado. Así, X va a inducir el espacio probabilístico $(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$, donde P_X viene dada por:

$$P_X(B)=P(X^{-1}(B))=P\left(\{w\in\Omega \ : \ X(w)\in B\}\right) \quad \forall B\in\mathcal{B}$$

A P_X se la denomina ***función de probabilidad*** de la v.a. X.

Veamos que efectivamente es una probabilidad. Para ello tengo que comprobar que se verifican los 3 axiomas siguientes:

- Axioma de no negatividad

  $P_X(B)=P(X^{-1}(B))\geq 0$ ya que $X^{-1}(B)\in\mathcal{A}$ y P es probabilidad.

- Axioma del suceso seguro:

  $P_X(\mathbb{R})=P(X^{-1}(\mathbb{R}))=P(\Omega)=1$ ya que P es probabilidad

- Axioma de aditividad completa:

Sean $B_1,....,B_{n,..}\in\mathcal{B}$ con $B_i\cap B_j=\varnothing \ \forall i\neq j$

$$P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)=P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(B_i)\right)=(*)$$

Como $X^{-1}(B_1),\ldots,X^{-1}(B_n)\in \mathcal{A}$ y $X^{-1}(B_i)\cap X^{-1}(B_j)\neq\varnothing\quad \forall i\neq j$

$$(*)=\sum_{i=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_i))=\sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i)$$

Entonces P_X es una función de probabilidad que recibe el nombre de función de probabilidad de la v.a. X.

Sea X una v.a. definida en un espacio probabilístico $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Se define la ***función de distribución de una variable*** X como la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que asocia a cada número real la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales a él.

$$F(x)=P(\{w\in\Omega\ :\ X(w)\leq x\})=P_X((-\infty,x])=[\text{Notación}]=P\{X\leq x]\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Esta función verifica las propiedades

1. F es no decreciente.
2. F es continua a la derecha.
3. $F(+\infty)=1,\quad F(-\infty)=0$

Para finalizar esta introducción a las v.a, decir que existen tres tipos de v.a.: discretas, continuas y mixtas. Este tema versará sobre las primeras.

II. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA

II.1. VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Sea X una v.a definida en un espacio probabilístico $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Se dice que X es una v.a discreta si existe un conjunto numerable de números reales, E, tal que se verifique:

$$P\{X\in E\}=P(\{w\in\Omega\ :\ X(w)\in E\})=1$$

Es decir, una v.a. discreta tomará valores a lo sumo un número infinito numerable de valores reales.

II.2. FUNCIÓN MASA DE PROBABILIDAD

Sea X una v.a. discreta definida en un espacio probabilístico $(\Omega,\mathcal{A},P)$, que toma valores en $E=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$.

Notemos $p_i=P\left(\left\{w\in\Omega:\ X(w)=x_i\ \right\}\right)=P\left\{X=x_i\right\}$ con $i\in\mathbb{N}$.

A la sucesión de números reales $\{p_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ que nos da las probabilidades con la que la v.a discreta toma cada uno de sus valores se la denomina *función masa de probabilidad.*

Propiedades

La sucesión $\{p_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ que define la función masa de probabilidad de una v.a. discreta verifica:

1. $p_i\geq 0\quad\forall i\in\mathbb{N}$
2. $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$

Recíprocamente, toda colección numerable de números reales no negativos, cuya suma sea igual a 1, es la función masa de probabilidad de alguna v.a. discreta.

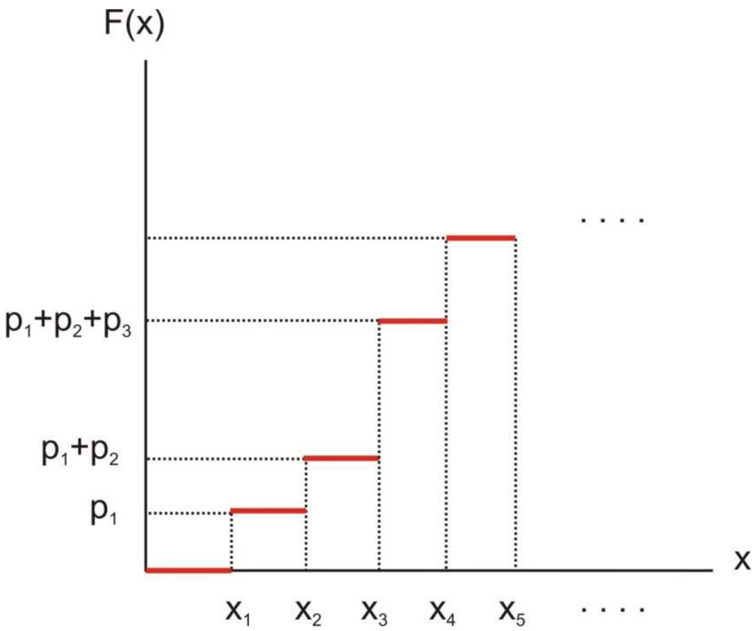
II.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE UNA V.A DISCRETA

La función de distribución de una v.a discreta se puede expresar a partir de la función masa de probabilidad.

Sea X una v.a discreta definida en $(\Omega,\mathcal{A},P)$ que toma sus valores en $E=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$, y cuya función masa de probabilidad viene definida por la sucesión $\{p_i\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, si F designa la función de distribución de X, y $x\in\mathbb{R}$, se tiene:

$$F(x)=P\left(\{w\in\Omega\ :\ X(w)\leq x\}\right)=P\{X\leq x\}=\sum_{x_i\leq x}p_i=\sum_{x_i\leq x}p\{X=x_i\}$$

Gráficamente:



Observemos que la función verifica que es escalonado, continua en todo punto por la derecha, no decreciente, $F(+\infty)=1$ y $F(-\infty)=0$.

III. CARACTERÍSTICAS Y TRATAMIENTO

En el estudio de una v.a. es adecuado resumir toda la información aportada por su distribución de probabilidad mediante ciertos parámetros o valores numéricos que cuantificarán o medirán diversas propiedades de la v.a. considerada, Además, nos permitirán sintetizar el comportamiento aleatorio de la v.a. Los más importantes son la esperanza, la varianza y, en general, los momentos.

III.1. ESPERANZA O MEDIA MATEMÁTICA

Sea X una v.a discreta que toma valores en un conjunto $E=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{x_i\}$, y cuya función masa de probabilidad es $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ verificándose $P\{X=x_i\}=p_i$. Entonces diremos que existe la esperanza matemática de X si la serie $\sum_{i=1}^{\infty}p_i x_i$ es absolutamente convergente. En tal caso se define la esperanza matemática o media de X como:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i x_i$$

La esperanza de una v.a. discreta ofrece un valor representativo de la función masa de probabilidad ya que es el valor alrededor del cual se sitúa la mayor parte de dicha función.

Algunas propiedades de la esperanza matemática son las siguientes:

1.- Si X =c , entonces E X =c (Es decir la media de una constante es dicha constante)

2.- Si X es una v.a. acotada, esto es, $\exists a,b \in \mathbb{R}$ con $P\{a \le X \le b\} = 1$, existe EX, y además $a \le EX \le b$.

3.- Si $X \ge 0$ y existe EX, entonces $EX \ge 0$

4. Si existe EX, existe $E(aX+b)$ con a, b dos números reales cualesquiera. Además $E(aX+b) = aEX + b$

5. Si X es una v.a. y $h_1(X)$, $h_2(X)$,..... $h_n(X)$ son transformaciones de X tales que existe $Eh_i(X)$ para i=1,...n entonces existe la esperanza de $\sum_{i=1}^{n} h_i(X)$, siendo

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} h_i(X)\right] = \sum_{i=1}^{n} Eh_i(X)$$

6. Si X es una variable y h(X), g(X) son dos transformaciones de X tales que $h(X) \le g(X)$ y existen $Eh(X)$ y $Eg(X)$, entonces $Eh(X) \le Eg(X)$.

III.2. MOMENTOS

Sea X una variable aleatoria discreta. Para $n \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$ vamos a considerar las funciones de X, X^n y $(X-c)^n$.

Si existe EX^n la llamaremos *momento no centrado* (o centrado en el origen) de orden n de la variable X. Los momentos no centrados se denotan por m_n. Es decir:

$$m_n = EX^n = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^n \quad \text{donde } p_i = P\{X = x_i\}$$

Si existe $E(X-c)^n$ lo llamaremos momento centrado en c de orden n de la variable X. Tomando $c = EX$ (en el caso de que ésta exista) obtenemos el momento centrado en la media de orden n de la variable X: $E(X-EX)^n$. A los momentos centrados en la media se los denota por μ_n. Es decir:

$$\mu_n = E(X-EX)^n = \sum_{i=1}^{\infty} p_i (x_i - EX)^n$$

Llamamos varianza de X al momento centrado de orden 2: $\mathrm{Var}X = E(X-EX)^2$

e informa del grado de dispersión de la distribución entorno a su esperanza. Cuanto menor sea su valor, más representativa será la esperanza.

La varianza de una v.a. discreta X verifica las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2$
2. $\mathrm{Var}X = 0$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $P\{X = c\} = 1$
3. $\mathrm{Var}X < E(X-c)^2$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$, $c \neq EX$
4. $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2 \mathrm{Var}X$, para $a, b \in \mathbb{R}$ cualesquiera.

Consideremos $|X|^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, si existe $E|X|^\alpha$ se llamará *momento absoluto de orden* α de la v.a. X.

A la raíz cuadrada de la varianza se le llama *desviación típica* y se designa por σ.

III.3. FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS

Sea X una v.a. discreta. Si para todo t perteneciente a un entorno de cero existe $E\left[e^{tX}\right]$, se define la función generatriz de momentos (f.g.m) de la v.a. X como:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

La f.g.m. no tiene por qué estar definida para todos los valores $t \in \mathbb{R}$. Sí está asegurada su existencia cuando la v.a. está acotada.

Su importancia radica en que aporta un nuevo método para el cálculo de momentos, y que caracteriza de forma única a una distribución de probabilidad, esto es, dos variables aleatorias con la misma f.g.m. para todos los valores de t pertenecientes a un entorno del origen, tendrán la misma función masa de probabilidad. Concretemos como hallar los momentos:

Teorema

Sea X una v.a. tal que existe su f.g.m en un entorno $]-t_0,t_0[$ de cero. Entonces se verifica que:

1. Existen todos los momentos de la v.a. X.

2. Para todo $t\in]-t_0,t_0[$ es $M_X(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{t^nEX^n}{n!}$

3. $M_X(t)$ es derivable y existen sus derivadas de cualquier orden. Además:

$$\left.\frac{d^{(k}M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=EX^k \quad , \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

III.4. DESIGUALDADES BÁSICAS RELACIONADAS CON LOS MOMENTOS

Nos permitirán acotar probabilidades relativas a determinadas v.a. cuando las distribuciones de probabilidad son desconocidas, y sólo se conozcan la media y la varianza de la variable. Las más destacadas son:

Desigualdad básica

Sea X una v.a. discreta y $h(X)$ otra v.a, positiva y tal que existe $Eh(X)$. Entonces, para todo $\varepsilon>0$ se verifica que:

$$P\{h(X)>\varepsilon\}\le\frac{Eh(X)}{\varepsilon}$$

-Dem-

Consideremos $A=\{x/\ h(x)\le\varepsilon\}$ y $B=\{x/\ h(x)>\varepsilon\}$ para $\varepsilon>0$ fijo

$$Eh(X)=\sum_{x}h(x)P\{X=x\}=$$
$$=\sum_{x\in A}h(x)P\{X=x\}+\sum_{x\in B}h(x)P\{X=x\}\ge\sum_{x\in B}h(x)P\{X=x\}\ge$$
$$\ge\ \varepsilon\sum_{x\in B}P\{X=x\}=\varepsilon P\{h(X)>\varepsilon\}$$

■

Desigualdad de Markov

Sea X una v.a. discreta y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que existe $E|X|^\alpha$. Entonces, para todo $K > 0$ se verifica que:

$$P\{|X| > K\} \leq \frac{E|X|^\alpha}{K^\alpha}$$

-Dem-

Basta hacer $h(X) = |X|^\alpha$ y $\varepsilon = K^\alpha$ en la desigualdad básica. ■

Desigualdad de Tchebyschev

Sea X una v.a. discreta tal que existe EX^2. (Esto implica que también existe EX, y por tanto la varianza.). Entonces, para todo $K > 0$ se verifica que:

$$P\{|X - EX| > K\} \leq \frac{VarX}{K^2}$$

-Dem-

Basta hacer $h(X) = (X - EX)^2$ y $\varepsilon = K^2$ en la desigualdad básica. ■

Esta desigualdad también aparece así:

$$P\{|X - EX| > K\sigma\} \leq \frac{1}{K^2}$$

donde σ es la desviación típica. (En este caso se ha tomado $\varepsilon = K^2\sigma^2$)

El sentido esencial de esta desigualdad estriba en que nos permite medir, en términos de probabilidad, la manera que los valores de la v.a. se dispersan alrededor de la media, empleando como medida de dispersión la varianza.

Además de las características ya estudiadas, comentar (aunque no las desarrollaré) que hay otras características de posición importantes, como la mediana, moda, cuantiles, o características de forma como el coeficiente de asimetría o el coeficiente de curtosis.

Ha llegado el momento de estudiar algunos ejemplos de v.a discretas. Nos centraremos en la distribución binomial y en la de Poisson.

IV. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Supongamos un experimento aleatorio cuyo resultado es la ocurrencia o no ocurrencia de un determinado suceso que denotamos por A, siendo P(A)=p. Se denomina:

- *Éxito* a la ocurrencia del suceso A, y por tanto P(A)=p es la probabilidad de éxito.
- *Fracaso* a la no ocurrencia del suceso A, es decir, a la ocurrencia de A^c siendo $P(A^c)=1-p=q$ la probabilidad de fracaso.

Supongamos que repetimos n veces un experimento bajo las siguientes hipótesis:

1.- La probabilidad de éxito permanece constante a lo largo de las n pruebas.

2.- Las n pruebas son independientes entre sí.

Cada repetición del experimento bajo estas hipótesis se denomina ensayo.

Definimos una v.a X que representa el número de éxitos en n ensayos siendo p la probabilidad de éxito. Entonces, se dice que X se distribuye según una binomial de parámetros n y p, y se representa por $X \sim B(n,p)$.

La función masa de probabilidad de X es:

$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ para x=1,2,....,n y con 0<p<1 y $n\in\mathbb{N}$. Veamos cómo se obtiene:

P(ocurran x éxitos consecutivos y n-x fracasos consecutivos)=

$$P(A\cap A\cap .....{}_{x\ veces}....\cap A\cap \bar{A}\cap \bar{A}\cap ....{}_{n-x\ \ veces}\cap \bar{A})=\left[P(A)\right]^x\left[P(\bar{A})\right]^{n-x}=p^x\left(1-p\right)^{n-x}$$

La probabilidad de obtener una serie de con x éxitos y n-x fracasos pero en cualquier otro orden será:

$P\left(X=x\right)=p^x(1-p)^{n-x}\cdot$ (nº de ordenaciones de una serie de x éxitos y n-x fracasos)=

$=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

Veamos que es una verdadera función masa:

a) $P\left(X=x\right)>0$

b) $\sum_{x=0}^{n}P\left(X=x\right)=\binom{n}{0}p^0(1-p)^n+.....+\binom{n}{n}p^n(1-p)^0=\left(p+(1-p)\right)^n=1^n=1$

La función de distribución de la binomial es:

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 \ \text{si} \ <0 \\ \sum_{i=0}^{[x]} P(X = i) = \sum_{i=0}^{[x]} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad 0 \le x<n \\ 1 \ \text{si} \ x \ge n \end{cases}$$

Para facilitar el cálculo de probabilidades binomiales existen tablas que nos dan según distintos valores n y p las probabilidades con que la v.a. puede tomar sus posibles valores.

Existen otras tablas llamadas tablas acumulativas las cuales nos dará para distintos valores de n y p la función de distribución asociada a cada uno de los valores posibles de la variable.

Estudiemos algunas de las características de estas variables. Centraremos nuestra atención al estudio de la media, y la varianza.

Media

Si $X \sim B(n,p)$, entonces $EX = np$. Veámoslo:

- Dem-

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} xP(X = x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$\sum_{x=0}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!((n-1)-(x-1))!} pp^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} =$$

$$np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^{x-1} (1-p)^{(n-1)-(x-1)} = \begin{bmatrix} n-1 = m \\ x-1 = y \end{bmatrix}$$

$$np \sum_{y=0}^{n} \frac{m!}{y!(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y} = np \sum_{y=0}^{n} \binom{m}{y} p^y (1-p)^{m-y} =$$

$np \sum_{y=0}^{n} P\{Y = y\}$ siendo $Y \approx B(m,p)$. Entonces por propiedades de la binomial se tiene que $\sum_{y=0}^{n} P\{Y = y\} = 1$. Con lo que E(X)=np.

■

Varianza

Si $X \sim B(n,p)$, entonces $\mathrm{Var}X = np(1-p)$.

-Dem-

Para calcularla aplicaré que $\mathrm{Var}X = E(X) - \left(E(X)\right)^2$

$$E(X)^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [x^2 = x(x-1)+x] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + EX$$

$$= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} + np = \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$\sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} (1-p)^{n-x} + np =$$

$$n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2}(1-p)^{x-k} + np = \begin{bmatrix} x-2=y \\ n-2=m \end{bmatrix} =$$

$$np + n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!(m-y)!} p^y (1-p)^{m-y} = np + n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{m} P\{Y=y\}$$

siendo $Y \sim B(m,p)$. Entonces $\sum_{y=0}^{m} P\{Y=y\} = 1$. Entonces $E(X^2) = np + n(n-1)p^2$

Entonces $\mathrm{Var}X = E(X) - \left(E(X)\right)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$

■

Estudiemos ahora la **función generatriz de momentos** de $X \sim B(n,p)$.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}\left(pe^t\right)^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= [e^t p + (1-p)]^n \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

IV.2. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Existen determinados sucesos que van ocurriendo constantemente en el espacio o en el tiempo, como

- Nº de personas que llegan a una determinada cola en un determinado tiempo.
- Nº de bacterias presentes en un cultivo

- Nº de solicitudes de seguros procesados en una compañía en un determinado período de tiempo.

A este tipo de sucesos está referida la distribución de Poisson.

Definamos formalmente esta distribución:

Sea X una v.a. que representa el nº de sucesos aleatorios independientes que ocurren a velocidad constante sobre el tiempo o el espacio. Entonces se dice que X sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, siendo λ el número medio de ocurrencias en cada unidad de tiempo o espacio considerada. Se representa por $X \sim P(\lambda)$.

La función masa de probabilidad asociada a X es:

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!} \quad \text{con x=0,1,2,,,,,} \quad \text{y} \quad \lambda > 0.$$

Es función masa ya que:

a) $P\{X = x\} > 0$

b) $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!} = 1$ ya que $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!}$ converge a e^{λ}

La función de distribución es:

$$F(X) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x<0 \\ \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i}}{i!} \quad \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Las características más importantes son la media y la varianza. Calculémoslas:

<u>Media</u>

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xe^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = [y = x-1] =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y}}{y!} = [\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y}}{y!} \text{ converge a } e^{\lambda}] = \lambda$$

<u>Varianza</u>

Para el cálculo de la varianza aplico que Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2.

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{\infty}x^2\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=[x^2=(x-1)x+x]=\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}+\sum_{x=0}^{\infty}x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=$$

$$\sum_{x=0}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}+EX=\lambda+\sum_{x=2}^{\infty}x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\lambda+\sum_{x=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!}=$$

$$=\lambda+e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}=[x-2=y]=\lambda+e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}=[\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}\text{ converge a }e^{\lambda}]=$$

$$\lambda+\lambda^2$$

Por tanto $\operatorname{Var}X=\lambda+\lambda^2-(\lambda)^2=\lambda$

Veamos cual es la **función generatriz** de momentos:

$$M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\sum_{x=0}^{\infty}\left(e^{tx}\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^x}{x!}=\left[\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^x}{x!}\quad\text{converge a }e^{e^t\lambda}\right]$$

$$=e^{-\lambda}e^{e^t\lambda}=e^{\left[\lambda\left(e^t-1\right)\right]}=\exp\left\{\lambda\left(e^t-1\right)\right\}\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

Veamos ahora un teorema que relaciona la distribución de Poisson con la binomial.

Teorema:

Sea X v.a con distribución binomial $X\sim B(n,p)$. Vamos a tomar límites cuando $n\to\infty$ y $p\to0$, pero de modo que se cumpla que el producto np permanece constante y no nulo. Llamemos λ a dicho producto, entonces se tiene:

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty,p\to0}P\{X=x\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\quad\text{para x=0,1,2....}$$

-Dem-

$$P\{X=x\}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}=[\text{Multiplico y divido por }n^x]=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-x+1)}{x!n^x}(np)^x(1-p)^{n-x}=[\lambda=np]=\frac{n(n-1)...(n-x+1)}{n^x}\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^{n-x}=$$

$$=\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}.....\frac{n-x+1}{n}\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^{n-x}=\frac{1.(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{x+1}{n})}{(1-p)^x}\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^n$$

Tomando limites tenemos que:

$$\text{Lim}_{n\to\infty,p\to 0}(1-p)^n = \text{Lim}_{n\to\infty,p\to 0}\left[(1-p)^{\frac{-1}{p}}\right]^{-np} = e^{-np} = e^{-\lambda}$$

y el numerador y el denominador de la fracción tienden a 1.
Por lo que obtengo lo que quería.

■

De este resultado se deduce que la distribución de Poisson aproxima bien a la binomial cuando el número de veces que se repite el experimento es muy grande, y la probabilidad de éxito muy pequeño. En la práctica se ha demostrado que la aproximación es buena si $n \geq 25$ y $p \leq 0{,}1$.

IV.3. APLICACIONES DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL Y DE POISSON

Las familias de distribuciones binomial y Poisson son dos de las más importantes distribuciones de probabilidad debido a que modelizan multitud de fenómenos, y a que su aplicación en otros campos, como la Biología, y en general, las Ciencias de la Salud, es muy amplia.

- Los ejemplos más sencillos en los que encontramos la distribución binomial son los juegos de azar; lanzamientos de dados, monedas, etc. Otra aplicación importante es el estudio de la herencia biológica. Por ejemplo: supongamos que tenemos un animal cuyos padres pertenecen a dos grupos distintos A, B. Sea p_A la probabilidad de que el hijo pertenezca al grupo A y sea p_B la probabilidad de que pertenezca al grupo B. Si se cruzan n parejas de animales siendo uno del grupo A y otro del B, el número de descendientes que pertenecerán a A sigue una distribución de parámetros n y p_A (análogo para los descendientes que pertenecen a B).
- Otra aplicación, muy utilizada por las compañías de seguros es la siguiente: Un individuo de x años puede morir o no el año en que cumple esos años. Consideremos el suceso A que muera ese año. Se ha observado en múltiples estudios que la frecuencia de A tiende a estabilizarse. Se puede, por tanto, hablar de la probabilidad de que un individuo de x años muera el año en que

los cumple. Pues bien, esta probabilidad se calcula mediante un binomial B(n,p) en la que n es el nº de asegurados de la compañía.

- Ejemplos típicos de variables que siguen aproximadamente la distribución de Poisson pueden ser la frecuencia en una población de enfermedades o sucesos muy raros; albinismo, síndrome de Down, número de individuos que han obtenido dos, tres premios de lotería, número de llamadas telefónicas simultanea a una centra, etc.
- Existen otro tipo de sucesos a los que se puede aplicar la distribución de Poisson. Son los sucesos estocásticos, que son aquellos que se desarrollan con el tiempo y varían aleatoriamente. Estos procesos están adquiriendo cada vez más fuerza en el campo de la Física y sobre todo en la Genética, donde en muchos casos, cuando el nº de generaciones tiende a infinito, se tiene una distribución de Poisson.
- Pero el mejor ejemplo de experimento aleatorio que sigue una distribución de Poisson aparece en el estudio de las desintegraciones radioactivas; una sustancia radiactiva emite partículas α, y es el nº de partículas que llegan a una porción dada del espacio durante el tiempo t la que sigue una distribución de Poisson $P(\lambda)$ para conveniente λ.

Hay que terminar el tema con un párrafo que sirva de conclusión y que el tribunal vea que es realmente una conclusión. En las últimas convocatorias de oposiciones se valora positivamente una buena conclusión. Se pueden mencionar aspectos prácticos y didácticos del tema, cómo llevarlo al aula y se puede anotar alguna ventaja o dificultad relacionado con la docencia mucho mejor. Si no se puede por la naturaleza del tema (algunos son tan específicos que no se imparten de ningún modo en la materia de Matemáticas), se termina con un resumen de los aspectos más destacados del tema o a las aplicaciones que el tema puede tener. No repitas lo que ya dijiste en la introducción. ESTE PÁRRAFO DE CONCLUSIÓN CONVIENE QUE LO ELABORES TÚ Y LO ADAPTES A TU COMUNIDAD Y SEA DISTINTO DE LA CONCLUSIÓN DE CUALQUIER OTRO ASPIRANTE QUE SE PRESENTE EN TU MISMO TRIBUNAL. Podría hacerse con frases del tipo:

"Hemos llegado al final del tema y me gustaría destacar a modo de conclusión …."

Recuerda que la conclusión no debe ser muy extensa.

V. BIBLIOGRAFÍA

■ Castillo Guijarro, I **Estadística descriptiva y Cálculo de probabilidades**. Madrid. Pea, 2006.

■ López Cachero, M. **Fundamentos y métodos de la Estadística**. Madrid. Ed. Pirámide

■ Maldonado Jurado, J,A, y otros. **Curso básico de Probabilidad**. Copicentro Editorial, Universidad de Granada 2007.

■ Mendenhall, William. **Introducción a la probabilidad y estadística;** 13ª Ed. Thomson Cengage Learning; México. 2008.

■ Larson, Harold J; **Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística**; Limusa-Noriega; México 1995.

■ Roger Bargas Interian, Mateo Camargo Pérez. **Introducción a la probabilidad y la estadística**. Editorial Progreso SA, 2006.

■ Gnedenko, B. **Teoría de las probabilidades**. Ed. Euro Omega-Rubiños, 1995.