TEMA 36: PROPORCIONES NOTABLES. LA RAZÓN ÁUREA. APLICACIONES.

TEMA 36: PROPORCIONES NOTABLES. LA RAZÓN ÁUREA. APLICACIONES.

Uno de los principales defectos que se le han achacado siempre a las matemáticas es su falta de conexión con el mundo, la realidad cotidiana y la naturaleza en general. Pero esto no es así con buena parte de ellas. De entre los muchos temas que hacen patente la relación entre las matemáticas y otras disciplinas, las proporciones y, en especial la razón áurea es uno de los más apropiados. Midiendo el caparazón de un caracol se obtiene un número, el número de oro, 1.618....; y estudiando las estrellas de mar, la flor de geranio, la de girasol, y a !una persona! Se comprueba que dicho número es una constante en todos ellos. Con el conocimiento del número de oro se construyeron edificios para rezar a los dioses (Partenon, Notre Dame, Alhambra), para vivir las personas, y se crearon estatuas, cuadros como la Venus de Mito, o el cuadro de Rafael Zabaleta (Jaén) titulado "mujeres en el mar". Pero no sólo nos dedicaremos en este tema al número de oro, aunque claro está tampoco estudiaremos la teoría general sobre las proporciones. Yo voy a centrarme en el estudio de la proporcionalidad geométrica referente a longitudes, dando definiciones en los casos concretos de rectángulos y segmentos. Además del interés que tienen por sí mismas estas proporciones, me servirán para estudiar en el capítulo II la razón áurea. Para finalizar el tema hablaré de algunas de las muchas aplicaciones que el número de oro tiene.

I. PROPORCIONES NOTABLES

I.1. PROPORCIÓN EN UN RECTÁNGULO

Dado un rectángulo S cuyos lados miden a y b, se define la proporción del rectángulo S como el número:

$$p(S)=\frac{\max\{a,b\}}{\min\{a,b\}}$$

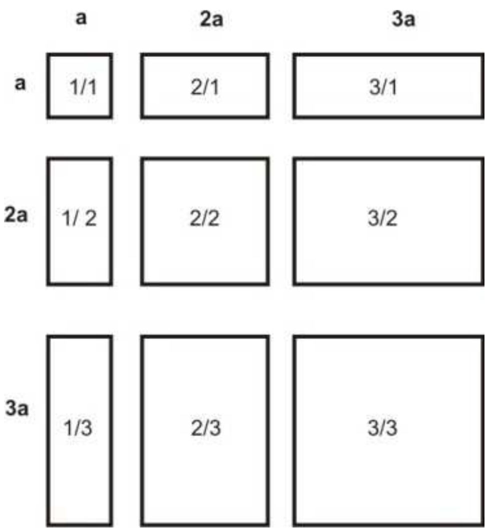
Evidentemente $p(S)\geq 1$ y $P(S)=1$ para un cuadrado. Además p(S) no depende del orden de los lados del rectángulo.

Es claro que la proporción es invariante por semejanzas, es decir, la proporción de un rectángulo de lados m.a y m.b es la misma que la proporción de un rectángulo de dimensiones a y b.

■ Rectángulos de proporción conmensurable

En el caso en el que la proporción de un rectángulo sea un número racional diremos que dicho rectángulo tiene *proporción conmensurable* (o racional).

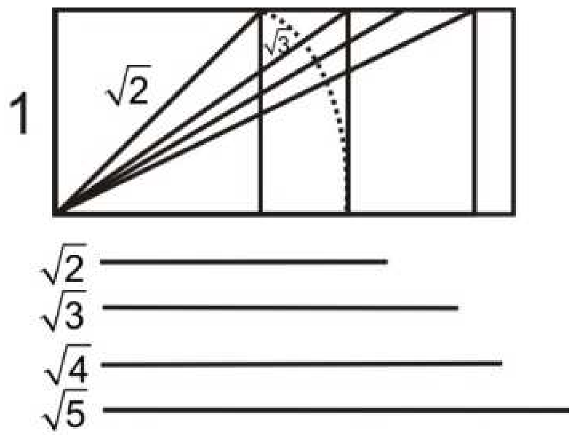
Un método generador de rectángulos con proporciones racionales viene dado por el siguiente cuadro:



■ Rectángulos de proporción inconmensurables

En el caso en el que la proporción sea un número irracional diremos que el rectángulo tiene *proporción inconmensurable o irracional*.

Dentro de los rectángulos de proporción inconmesurables, merecen especial atención aquellos en los que p(S), a y b son números construibles con regla y compás. A este tipo pertenecen los rectángulos de proporción $\sqrt{n}$. Para su construcción partimos del cuadro de lado 1, cuya diagonal es $\sqrt{2}$; por abatimiento de esa diagonal se obtiene el rectángulo de proporción $\sqrt{2}$ cuya diagonal mide $\sqrt{3}$, que al ser abatida se obtiene el rectángulo de proporción $\sqrt{3}$, etc.

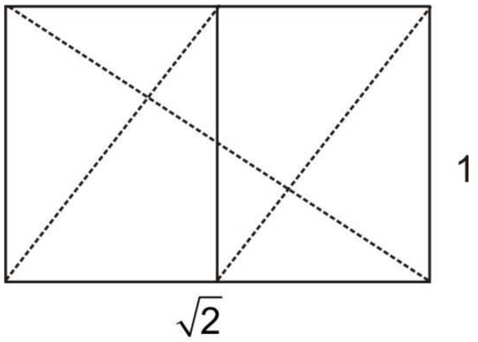


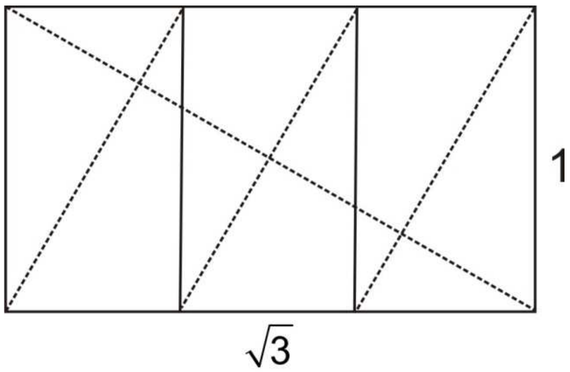
A partir de un rectángulo cualquiera (de proporción racional o irracional), se puede construir otro de la siguiente forma:

"Se traza una diagonal y, desde cualquiera de sus vértices libres se dibuja la perpendicular sobre ella. La perpendicular determina sobre el lado del rectángulo un punto que es el vértice del rectángulo buscado."

Al rectángulo así obtenido le llamaremos recíproco del primero y es semejante a él.

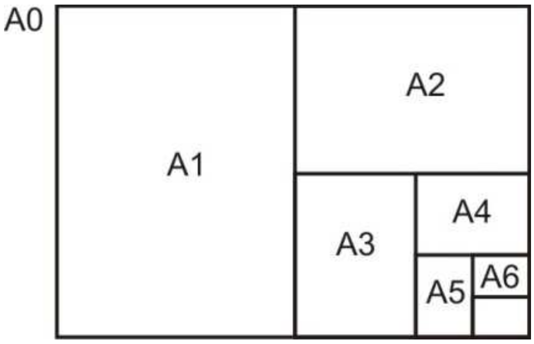
Para el caso de los rectángulos cuyas proporciones son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ observamos que éstos se pueden obtener como dos y tres veces sus recíprocos, respectivamente.





En general, los rectángulos de proporción $\sqrt{n}$ son los únicos que se puede obtener como n veces sus recíprocos.

A esta propiedad debe el papel su "forma", muy práctica desde el punto de vista de la producción industrial: partiendo de un rectángulo de proporción $\sqrt{2}$ cuya superficie total es de 1 m^2 (el formato A0), se parte por la mitad y se obtiene el A1, cuya mitad es el A2, la mitad del siguiente el A3, la siguiente el A4, y así sucesivamente.



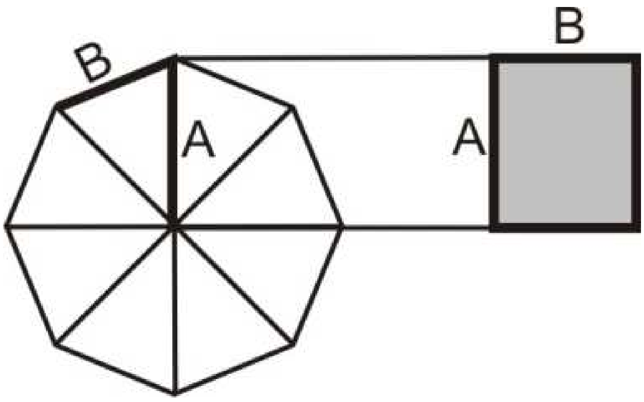
Se obtiene una serie de formatos en distintos tamaños que permiten hacer ampliaciones y reducciones sin riesgo a perder nada y siguiendo instrucciones fáciles ("doblar por la mitad" o duplicar), puesto que todos ellos tienen la misma "forma".

Dentro de los rectángulos de proporción irracional destacan aquellos en los que $p(S)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618...$. A dichos rectángulos los llamaré rectángulos áureos o de proporción divina. Al número 1,618... se le conoce como número de oro y se suele denotar por la letra griega ϕ. Esta proporción es sin duda una de las joyas matemáticas por excelencia y como tal será tratada en el punto II de este tema.

Destacar también la proporción cordobesa. Ésta surgió al intentar demostrar la atemporiedad y vigencia universal de la proporción áurea. Con tales propósitos se rastreó su existencia en las arquitecturas de Córdoba. Resultó que en vez de aquella apareció un módulo de proporción hasta entonces desconocido, por completo ajeno al rectángulo áureo que se esperaba encontrar. Se creyó que se trataba de una rara excepción a la regla y el hallazgo quedó catalogado como una invariante castiza local más.

Sin embargo tras la difusión de dicho estudio, investigaciones similares efectuadas en otros enclaves vienen constatando que su ámbito de aplicación excede del entorno provincial que se le atribuía para alcanzar límites aún no determinados.

En este contexto, la proporción que se dedujo del análisis de la figura humana a través de las artes locales cordobesas, resultó significativa. En el museo arqueológico local encontramos que los romanos, autores de los relieves, esculturas o mosaicos investigados, gustaron proporcionar sus figuras según la razón 1.3. A raíz de aquí se comprobó que ordenaciones aparentemente anárquicas seguían esta proporción. Tras las investigaciones realizadas se llegó a que dicha proporción era la misma proporción que la del rectángulo cuyos lados son el radio de la circunferencia circunscrita en un octógono y el lado de dicho octógono. Dicho valor es $\left(2-\sqrt{2}\right)^{-1/2}=1.3065...$



I.2. PROPORCIÓN ENTRE SEGMENTOS

Vamos trabajar ahora con segmentos. Veamos dos definiciones importantes:

Se llama razón de dos segmentos, a y b, al número que resulta de dividir las longitudes de ambos.

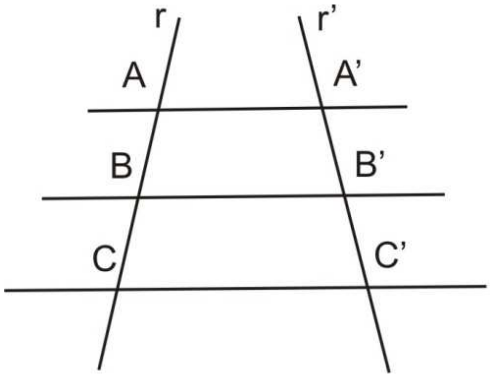
<u>Nota importante:</u> Designaré de la misma forma a un segmento y a su medida cuando sea conveniente.

Dos segmentos a y b se dicen proporcionales a otros dos c y d cuando la razón entre sus medidas es igual, es decir, si verifican que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

En esta expresión, cuando los 4 segmentos son distintos entre sí a cualquiera de ellos lo llamaremos **cuarta proporcional**. Si b=c (ó a=d), la proporción $\frac{a}{b}=\frac{b}{d}$ se llama proporción continua y al segmento repetido b se llama **media proporcional** entre los otros dos. Luego, si b es media proporcional entre a y d, se verificará que $b^2=ad$. En este caso se dice que d es una **tercera proporcional** a "a" y "b". Lo mismo se dice de "a" respecto a "b" y "d".

Una vez que tenemos definido lo que es *proporción entre segmentos* es imprescindible citar un resultado que ha sido muy importante a lo largo de la historia, el Teorema de Thales. Aunque hay un tema dedicado a él es digno de mención en este tema también.

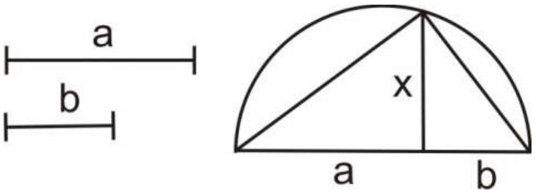
Dicho teorema dice: *"Si varias paralelas son cortadas por dos rectas secantes, los segmentos que determinan en una de las rectas son proporcionales a los segmentos que determinan en la otra secante"*.



$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$

Vía este teorema se construyen fácilmente la 3ª y 4ª proporcional. Para construir la media proporcional entre dos segmentos a y b se procede así:

Colocamos los segmentos a y b sobre una recta r, uno a continuación del otro. Buscamos el punto medio del nuevo segmento y trazamos una semicircunferencia que una los dos extremos. Levantamos un perpendicular a r desde el punto de unión de los segmentos iniciales y obtendremos tres triángulos rectángulos que son semejantes, puesto que tienen los ángulos iguales.



Se deduce que x es la media proporcional buscada: $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$

II. LA RAZÓN ÁUREA

II.1. IMPORTANCIA Y RECORRIDO HISTÓRICO DE LA RAZÓN ÁUREA

La proporción más célebre de la historia es sin duda la razón áurea también llamada la divina proporción, número áureo, número de oro, proporción áurea.

Es interesante comentar el significado e importancia del número de oro a lo largo de la historia. El número áureo ha sido desde la Antigüedad un número misterioso que parece en situaciones extrañamente diversas. Se supone que el número de oro era conocido antes de los griegos ya que aparecen figuras geométricas relacionadas con él en algunos monumentos y obras de arte anteriores a la civilización helénica (especialmente en el antiguo Egipto). Aunque se conocieran algunas de sus propiedades geométricas de forma experimental, fueron los griegos los primeros que dieron rigor a la noción de número de oro, y más en particular los "pitagóricos".

En la Edad Media cabe destacar al matemático italiano Leonardo de Pisa, llamado también Fibonacci (1180-1250), a quien se le atribuye la sucesión que lleva su nombre, muy relacionada con ϕ. Éste introdujo en su obra más importante, *Liber abaci*, el siguiente problema curioso: "Cierto hombre puso un par de conejos en un lugar rodeado por todas partes por una valla. ¿Cuántos pares de conejos se engendran a partir de aquel par en un año, suponiendo que cada par engendra cada mes un nuevo par que resulta productivo a partir del segundo mes?". La sucesión del número de pares que hay en cada uno de los sucesivos meses, 1,1,2,3,5,8,13,21,34,..., en la que cada término es la suma de los dos anteriores, se denomina la sucesión de Fibonacci. Pues bien, la razón de cada término de la serie de Fibonacci al anterior se aproxima cada vez más al número áureo (el límite de esta razón es precisamente el número áureo).

Pero quizás la obra más significativa sobre el tema llega en el Renacimiento con Luca Pacioli: "La divina Proporción". Fue publicada en Venecia en 1509 y tuvo el privilegio de ser ilustrada por Leonardo da Vinci. En este tratado se estudiaron las propiedades de ϕ así como sus atributos estéticos sin olvidar ciertos aspectos místicos.

A partir de aquí, el número áureo se siguió utilizando fundamentalmente en la pintura, escultura y arquitectura.

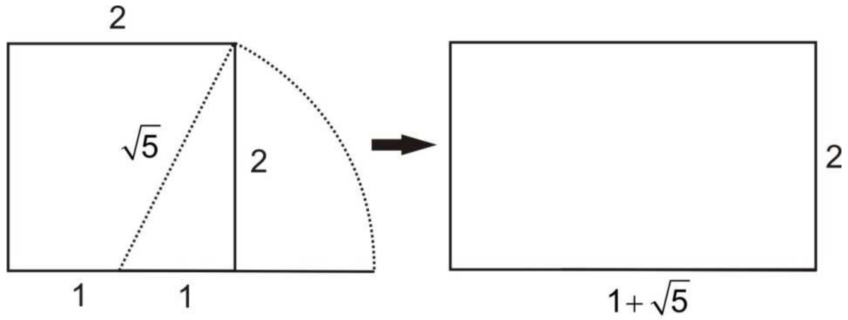
II.2. DEFINICIÓN DE LA RAZÓN ÁUREA

La proporción áurea surge de muchas maneras. En este apartado veremos dos de ellas que están relacionadas con las ya estudiadas proporciones de rectángulos y proporciones de segmentos.

■ Definición a partir de rectángulos

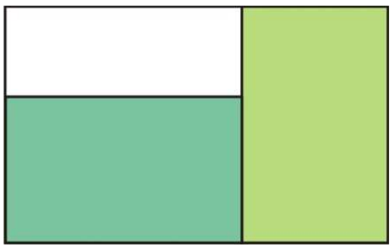
Como ya comentaba antes, un rectángulo S se dice con proporción divina si $p(S)=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618\ldots$ y a tal número se le llama número de oro y se denota mediante la letra griega ϕ.

El rectángulo con proporción ϕ, llamado rectángulo áureo, se construye a partir de un cuadrado abatiendo sobre un lado, desde el punto medio de éste el segmento que une dicho punto con un vértice cualquiera del cuadrado que no esté alineado con dicho punto.



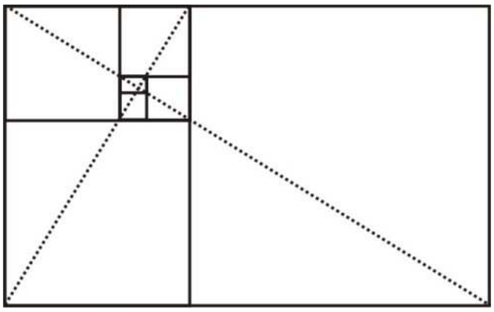
Este rectángulo está presente en muchos objetos de uso cotidiano: algunos billetes, tarjetas de crédito, DNI, en proporciones de muebles, etc.

Una propiedad interesante del rectángulo áureo es que si colocamos dos iguales en la posición de la figura, ambos determinan otro rectángulo, más grande, que también es áureo.



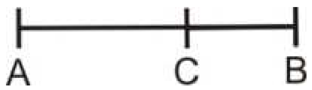
Si lo comprobamos, el rectángulo pequeño de la derecha es el recíproco del grande. Por tanto un rectángulo áureo se puede descomponer en su rectángulo recíproco, que también es áureo por ser semejante a él, y un cuadrado. Del mismo modo añadiéndole a un rectángulo áureo un cuadrado de lado el mayor de sus lados, el resultado es otro rectángulo de oro.

Podemos considerar la sucesión de rectángulos recíprocos obtenidos a partir de un rectángulo áureo dado. Esta sucesión tiende hacia un punto límite que resulta ser el punto de corte de las diagonales del rectángulo mayor y del siguiente.



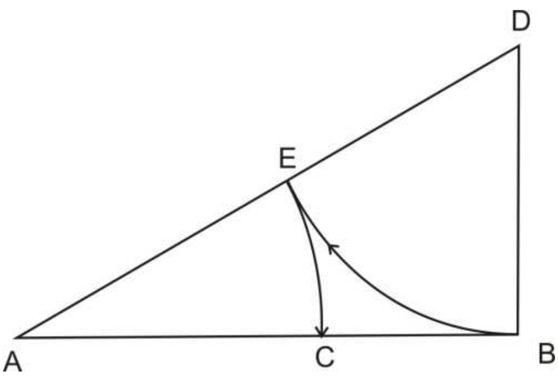
■ **Definición a partir de segmentos**

Dado un segmento AB y un punto C interior de dicho segmento verificando que el segmento mayor es media proporcional entre el segmento total AB y la parte menor, entonces se define la razón áurea como la razón entre las longitudes de los segmentos mayor y menor anteriores. Veamos qué razón es:



El punto C que busco debe verificar que $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$. Llamando AC=a, CB=b, resulta $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$. Si hacemos $\frac{a}{b}=x$ resulta la ecuación $1+\frac{1}{x}=x$, y por tanto la ecuación de segundo grado x^2-x-1=0. Resolviendo esta ecuación obtenemos la solución positiva $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618..=\phi=\frac{AC}{CB}$ a la que se le llama número de oro como ya sabemos.

Con regla y compás el punto C lo obtendríamos así:



1. Sobre la perpendicular a AB por B, situamos el punto D de forma que BD=AB/2
2. Se une A con D
3. Con centro en D y radio DB se traza un arco que determina el punto E
4. Con centro en A y radio AE se traza un arco que determina C sobre AB, punto que divide a AB según la sección áurea.

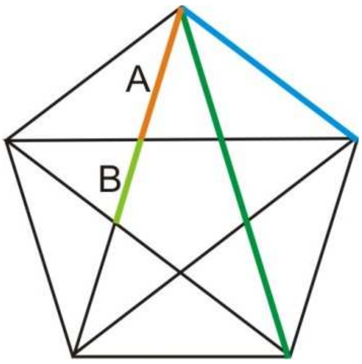
II.3. FORMAS ALTERNATIVAS PARA LA OBTENCIÓN DE Φ

II.3.A. FORMAS GEOMÉTRICAS

■ A partir de ciertos polígonos

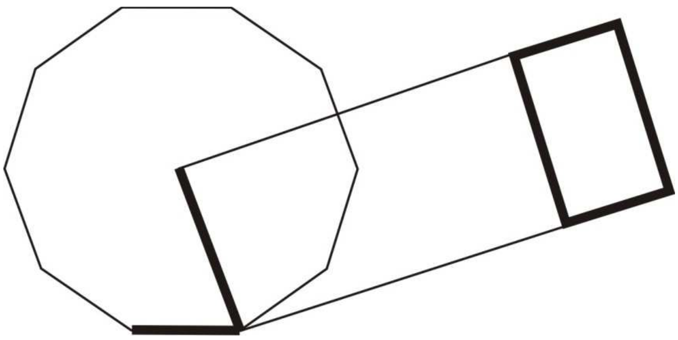
El número de oro también lo podemos encontrar en algunos de polígonos regulares y no regulares que conocemos. Así, por ejemplo aparece en el pentágono, en el decágono, triángulos rectángulos, etc. Veámoslo:

▪ Si partimos del pentágono y dibujamos el pentágono estrellado inscrito podemos comprobar que cada uno de los lados de pentágono estrellado es ϕ veces el lado del pentágono.

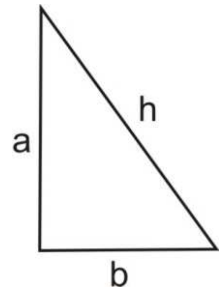


También podemos comprobar que A mide ϕ veces lo que mide B.

▪ Además podemos relacionar el número de oro con el decágono ya que ϕ es la proporción del rectángulo cuyos lados son el radio de la circunferencia circunscrita a un decágono y el lado de dicho decágono:



▪ También podemos encontrar el número de oro en algunos triángulos, como es el caso del triángulo rectángulo en el que la hipotenusa h y los catetos, a y b, guardan la relación $\frac{h}{a} = \frac{a}{b}$, es decir un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y el otro cateto.



Esta relación se traduce en que $a^2=h.b$ de donde por el teorema de Pitágoras $h^2=a^2+b^2$, obtenemos que $h^2=b^2+h.b$, con lo que $\frac{h^2}{b^2}=\frac{h}{b}+1$, luego $\frac{h}{b}=\phi$. Además de las relaciones que ya tenemos se deduce que $\frac{a}{b}=\sqrt{\phi}$.

■ **A partir de poliedros**

Pasando al espacio de tres dimensiones, el número de poliedros regulares convexos se reduce a 5: tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro. Luca Pacioli les da gran importancia y señala que no se pueden construir sin la ayuda de la divina proporción.

Una característica de estos cuerpos es que tienen entre sí íntimas relaciones estructurales. Existen distintas formas de pasar, directa e indirectamente, de uno cualquiera de los 5 poliedros a cualquiera de los otros, y aparecen numerosas relaciones áureas. Por ejemplo, los doce vértices de un icosaedro están sobre la superficie de un cubo, y la razón entre la arista del cubo y la del icosaedro inscrito es ϕ.

II.3.B. FORMAS ARITMÉTICO- ALGEBRAICAS

También podemos obtener φ como límite de ciertas sucesiones. Veámoslo:

■ $\phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+.....}}}}}$

Supongamos que el límite de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$ existe y es finito, y lo llamamos x. O sea $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$ =x. Elevando al cuadrado 1+ $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}$ $=x^{2,}$ con lo que podemos obtener la ecuación $x=x^2-1$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos la solución positiva de esta ecuación $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- $$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}}$$

Para probar esta igualdad basta verificar que ϕ se puede obtener como límite de esta sucesión de fracciones:

$$1,\ 1 + \frac{1}{1} = 2,\ 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}, ...$$

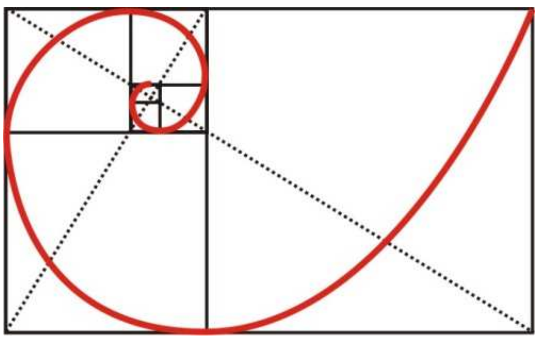
cuyo término general es el cociente de 2 términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci y por tanto converge a ϕ.

III. APLICACIONES

Son numerosas las aplicaciones que podemos encontrar de la razón áurea. Esta aparece en animales, plantas, galaxias, cuerpo humano, edificios, cuadros, etc. Distinguiremos fundamentalmente entre aplicaciones que se presentan en la naturaleza y aplicaciones en el arte.

III.1. EN LA NATURALEZA

Si a partir de un rectángulo áureo vamos hallando los rectángulos recíprocos y unimos los vértices opuestos de todos los cuadrados, obtenemos una espiral que aparece como una de las formas de crecimiento de los seres vivos, incluso de ciertas galaxias. A esta forma de crecimiento natural se le llama "crecimiento armonioso". Entre muchos otros, el caracol, la caracola, las telas de araña, cuernos de algunos animales, semillas de las margaritas y girasoles, están ligados a este tipo de espiral, llamada espiral logarítmica.



Entre los animales cuyas formas o estructuras están ligadas evidentemente a un pentágono estrellado o regular, se pueden citar la estrella de mar, el erizo de mar, la medusa y otros organismos marinos. Pero no solo con estos animales está relacionada la razón áurea, sino que con otros muchos también lo está.

Los cuerpos de los animales presentan también la proporción áurea. Por ejemplo las patas delanteras de un caballo forman un rectángulo áureo. En el hombre también encontramos proporciones áureas. Es muy conocido el grabado de Leonardo da Vinci para ilustrar los trabajos del arquitecto Vitrubio (siglo I a.C.) acerca de las proporciones humanas. Según este último el ombligo divide a la altura según la sección áurea. Más concretamente, la altura media total de un hombre es 1,625 la altura de los pies al ombligo y, 1,6 para las mujeres. Ambas razones son cocientes de términos consecutivos de la serie de Fibonocci, que sabemos que tiende a ϕ.

Pero existen otras muchas proporciones áureas en el cuerpo humano, como:

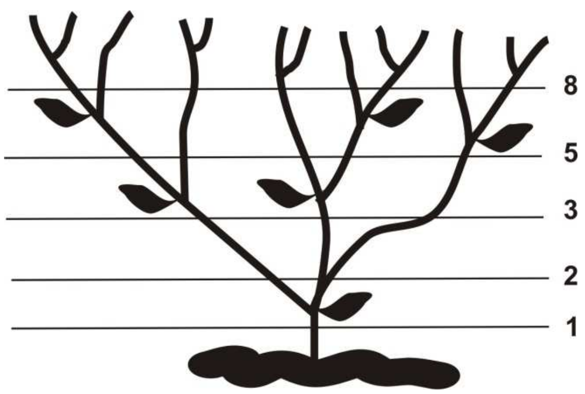
- Si consideramos las tres falanges del dedo anular y corazón y encontramos que la 1ª mide ϕ veces la 2ª y que la 2ª mide ϕ veces la 3ª.
- El rostro está normalmente enmarcado en un rectángulo áureo, y entre otras se dan las siguientes relaciones:

- La distancia que hay de la punta de la nariz al término del mentón es ϕ veces la distancia de la comisura de los labios al término del mentón.

- La distancia desde los ojos al mentón es ϕ veces la distancia desde la punta de la nariz hasta el mentón es ϕ .

También en el reino vegetal aparecen cosas curiosas íntimamente relacionadas con la sucesión de Fibonacci y por tanto con el número de oro.

Algunas plantas muestran los elementos de la sucesión de Fibonacci, en el número de brotes. El siguiente dibujo creo que es suficientemente ilustrativo:

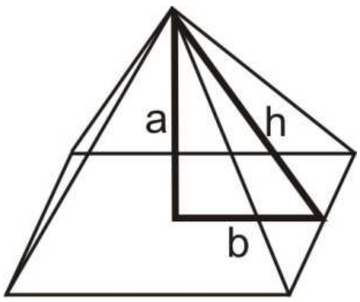


Pero no solo eso, sino el número de pétalos de algunas flores es especialmente significativo. Así por ejemplo los lirios y las azucenas tienen 3 pétalos, 5 tienen las rosas silvestres, 13 los girasoles, la achicoria tiene 21, mientras también se pueden encontrar margaritas con 34, 55 o incluso 89 pétalos, todos ellos términos de la sucesión de Fibonacci.

III.2. ARTE

En muchas esculturas y pinturas antiguas se observan proporciones áureas. Algunos de los pintores que han pintado cuadros según los principios del número de oro son: Nicolás Poussin, Leonardo da Vinci y Rafael y entre los modernos Salvador Dalí, Rafael Zabaleta.

Pero sin duda alguna los que más han aplicado el número de oro han sido los arquitectos de todos los tiempos. Ya los griegos conocían esta proporción, presente en la mayoría de sus construcciones. Incluso antes, en la pirámide de Keops (año 2600 a.C) encontramos la primera y más espectacular aparición de este número en la Arquitectura.



En esta pirámide se tiene que el triángulo formado por h, a, y b de la figura verifica que $\frac{h}{b}=\phi$ y $\frac{a}{b}=\sqrt{\phi}$ como ya comenté el hablar sobre triángulos.

Desde entonces, el número de oro ha sido utilizado constantemente. Aparece en lugares tan diversos como en el Partenón, en edificios renacentistas, en el monasterio de El Escorial, en la Alhambra, el Modulor de Le Corbusier,......

Merece una mención distinguida el arquitecto franco suizo de nuestro siglo Le Corbusier. Para él, el metro como unidad de medida es una unidad distante y fría implantada en la ilustración como medida renovadora. Le Corbusier busca un sistema de medidas adaptado al hombre. Introduce la figura del hombre con el brazo levantado, y a partir de este establece una escala o subdivisión de la figura humana jugando con razones áureas, a través de la cual se puede dar una escala de las posiciones humanas más habituales, que sirve de referente tanto para la arquitectura como para los elementos supletorios con ella.

En música también aparece ϕ en los cálculos de los intervalos correspondientes a los dos principales tipos de acordes perfectos.

No me gustaría concluir sin realzar más aún la importancia que el número de oro tiene y que siempre tendrá. Sin duda alguna es muy sorprendente la siguiente aparición del número de oro.

A todos nos habrá pasado que cuando vemos un partido de futbol llega un momento que pasamos de decir "llevan 20 minutos jugados" a decir "faltan 15 minutos para que la primera parte acabe". Igual pasa cuando vamos en el autobús y hasta nuestro destino hay 15 paradas. Al principio contamos la paradas diciendo "voy por la 4ª parada" o "voy por la 6ª". Pero llega un momento en que decimos "me quedan cuatro paradas". Y yo me pregunto ¿podemos determinar el instante en el que uno pasa de sumar a restar el tiempo, la sustancia, etc, que le queda por probar o vivir de una experiencia? Sí.

Llamemos 1 a la mesura total del acontecimiento. 1 es el tiempo que dura, la cantidad de sustancia que contiene, etc. Sea x la parte que hemos hecho, vivido o consumido del total. Entonces lo que queda será 1-x. Para alguien que lo mire desde fuera, como espectador sin sentirse implicado, el momento en el que el suceso se acaba, cuando comienza la cuenta atrás será aquel en que lo que falta se iguala a lo queda: x=1-x, luego x=1/2. A partir de la mitad comienza el desenlace.

Pero ¿y si uno mismo es quien vive o padece desde dentro la experiencia como en los ejemplos anteriores? Entonces el final de la experiencia se iniciará cuando se igualen las proporciones:

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{\text{lo uno ha vivido o consumido}}{\text{el total}} = \dfrac{x}{1} \\ P_2 = \dfrac{\text{lo que resta por vivir o consumir}}{\text{lo que uno ha vivido o consumido}} = \dfrac{1-x}{x} \end{cases}$$

es decir cuando $x=\dfrac{1-x}{x} \Rightarrow x^2+x-1=0$

La solución x de esta ecuación señala el punto en el que comenzaremos a descontar lo que resta en lugar de sumar lo que vivíamos hasta entonces. Aparece espectacularmente de nuevo el número de oro:

$$x^2+x-1=0 \text{ con lo que } x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\phi-1\\-\phi\end{cases}$$

Según esto, los puntos a partir de los cuales se inicia el fin se calculan multiplicando por ϕ -1. Por ejemplo:

- Esperanza de vida en España: 76 años. Entonces 76.(ϕ -1)=46,97... es decir a partir de los 47 años empieza la cuenta atrás.
- Un día, 24 horas, se acaba a partir de las 14h 50m.
- Un año inicia su final el 14 de agosto.
- Un partido de futbol inicia su final a los 55m 37seg., y la segunda parte a los 27m. 48 seg.

Sorprendente ¿verdad?

Hay que terminar el tema con un párrafo que sirva de conclusión y que el tribunal vea que es realmente una conclusión. En las últimas convocatorias de oposiciones se valora positivamente una buena conclusión. Se pueden mencionar aspectos prácticos y didácticos del tema, cómo llevarlo al aula y se puede anotar alguna ventaja o dificultad relacionado con la docencia mucho mejor. Si no se puede por la naturaleza del tema (algunos son tan específicos que no se imparten de ningún modo en la materia de Matemáticas), se termina con un resumen de los aspectos más destacados del tema o a las aplicaciones que el tema puede tener. No repitas lo que ya dijiste en la introducción. ESTE PÁRRAFO DE CONCLUSIÓN CONVIENE QUE LO ELABORES TÚ Y LO ADAPTES A TU COMUNIDAD Y SEA DISTINTO DE LA CONCLUSIÓN DE CUALQUIER OTRO ASPIRANTE QUE SE PRESENTE EN TU MISMO TRIBUNAL. Podría hacerse con frases del tipo:

"Hemos llegado al final del tema y me gustaría destacar a modo de conclusión …."

Recuerda que la conclusión no debe ser muy extensa.

IV. BIBLIOGRAFÍA

■ Fernández I., Reyes E**. Geometría del hexágono y el octógono**. Proyecto Sur de ediciones. Granada, 2003

■ VVAA. **La proporción: arte y matemáticas.** Biblioteca de UNO. Editorial Grao, 2009

■ Corbalán F. **La proporción áurea**. Colección El mundo es matemática. RBA editores, 2010

■ Fiol M. Luisa Y Fortuny Josep. **Proporcionalidad directa. La forma y el número**. Ed. Síntesis, Madrid 1990.

■ Revista SUMA Noviembre 1998