TEMA 18: MATRICES. MATRICES Y APLICACIONES LINEALES. CAMBIO DE BASE. ÁLGEBRA DE MATRICES. APLICACIONES EN CIENCIAS SOCIALES Y DE LA NATURALEZA.

TEMA 18: MATRICES. MATRICES Y APLICACIONES LINEALES. CAMBIO DE BASE. ÁLGEBRA DE MATRICES. APLICACIONES EN CIENCIAS SOCIALES Y DE LA NATURALEZA.

Las matrices aparecieron por primera vez hacia el año 1850, introducidas por el matemático inglés James Joseph Sylvester. El desarrollo inicial de la teoría de matrices debe al Matemático y Astrónomo irlandés sir William R. Hamilton, quién trató de extender a cuatro dimensiones las propiedades de los vectores, creando el álgebra no conmutativa. Arthur Cayley introdujo en 1858 la notación matricial como una forma abreviada de representación de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

El álgebra matricial es de gran utilidad en el estudio de los sistemas de ecuaciones, y las matrices aparecen de forma natural en Geometría, Estadística, Economía, etc. Actualmente muchos programas para ordenadores utilizan el concepto de matriz. Un ejemplo son las Hojas de cálculo, utilizadas en gestión empresarial y en gestión científica, y que funcionan utilizando una inmensa matriz con cientos de filas y columnas en cuyas casillas pueden introducirse datos y formulas a partir de las cuales se realizan los cálculos a gran velocidad.

En este tema estudiaré los aspectos más relevantes sobre matrices siguiendo el esquema expuesto anteriormente.

I. MATRICES

Dados dos conjuntos finitos de índices I, J y un conjunto E, se llama matriz de dimensión card Ixcard J con coeficientes en E a toda aplicación:

$$\begin{aligned} IxJ &\to E \\ (i,j) &\mapsto a_{ij} \end{aligned}$$

Normalmente, los elementos a_{ij} se colocan según una tabla rectangular de modo que el primer índice indica la fila y el segundo la columna que ocupan en éste.

Una matriz se representa por (a_{ij}), o por el rectángulo correspondiente, o bien, cuando no hay confusión por A.

La representación más usual de una matriz en donde card I=m y card J=n es:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En tal caso diremos que A es una matriz de orden o dimensión mxn. Al conjunto de todas las matrices de dimensión mxn con coeficientes en E lo representaremos por $M_{mxn}(E)$. En caso de que m=n se dice que la matriz es cuadrada de orden n.

A partir de la matriz inicial $A=(a_{ij})$, $(i,j)\in IxJ$, si I' es un subconjunto de I, y J' es un subconjunto de J, la matriz $A'=(a_{ij})$ tal que $(i,j)\in I'xJ'$ es una submatriz de A que se obtiene conservando únicamente las filas cuyo índice pertenece a I', y las columnas cuyo índice pertenece a J'. Recíprocamente, se dice que orlamos la submatriz A' cuando a partir de ella obtenemos la matriz A.

Veamos una serie de definiciones referentes a las matrices:

Se llama *traspuesta* de la matriz $A=(a_{ij})$ con $(i,j)\in IxJ$, a la matriz $A^t=(a_{ji})$.

Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

Así, si A es una matriz de dimensión mxn, la matriz traspuesta A^t es de dimensión nxm. Por tanto, podemos ver la trasposición como una aplicación biyectiva de $M_{mxn}(E)$ en $M_{nxm}(E)$ que a A le hace corresponder A^t. Obsérvese que esta aplicación es involutiva, es decir, $(A^t)^t=A$.

Se dice que una matriz A es *simétrica* si coincide con su traspuesta, es decir, si $A^t=A$, lo que implica que m=n. Luego es condición necesaria para que una matriz sea simétrica que sea cuadrada, y suficiente que verifique que $a_{ij}=a_{ji}$ $\forall i\in I,\ j\in J$.

Una matriz A se dice *antisimétrica* si $A^t=-A$. Como consecuencia, las matrices antisimétricas son cuadradas y verifican que $a_{ij}=-a_{ji}$ $\forall i\in I,\ j\in J$.

Veremos algunas propiedades de la trasposición de matrices más adelante, cuando hayamos definido las operaciones entre matrices.

En una matriz cuadrada A de orden n los elementos a_{ii} forman la diagonal principal, y los elementos a_{ij} tal que i+j=n+1 forman la diagonal secundaria. Por tanto, podemos decir que una matriz es simétrica si los elementos colocados simétricamente respecto a la diagonal principal son iguales.

Notemos que si A es antisimétrica, los elementos de la diagonal principal verificarán $a_{ii}=-a_{ii}$, es decir, $2a_{ii}=0$, luego $a_{ii}=0$ $\forall i\in I$.

Si A es una matriz cuadrada de orden n, se dice que es *triangular inferior* si son nulos todos los elementos que quedan situados por encima de la diagonal principal, es decir, $a_{ij}=0$ si $i<j$. Análogamente, una matriz *triangular superior* es una matriz cuadrada en la que $a_{ij}=0$ si $i>j$.

Una matriz *diagonal* es una matriz triangular superior e inferior, es decir, $a_{ij}=0$ si $i\neq j$.

Una matriz A se llama matriz escalar si es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales entre sí. En caso de que sean 1 a dicha matriz la llamaremos matriz identidad de orden n, y se denota por I_n.

Una matriz es nula si todos sus elementos son nulos y la representaremos por 0 si no es necesario especificar la dimensión.

Si $A=(a_{ij})$ es una matriz compleja, es decir, una matriz sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, se define la matriz *conjugada* de A como $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$. Si además se verifica que $\left(\overline{A}\right)^t=\overline{\left(A^t\right)}=A$, se dice que A es una *matriz hermitiana*, lo que implica que A es una matriz cuadrada tal que $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$, con lo que $a_{ii}\in\mathbb{R}$ y los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son conjugados.

Hasta ahora E era un conjunto cualquiera. En lo que sigue, consideraremos que el conjunto E es un cuerpo conmutativo notándolo por K.

Demos una nueva definición:

Sea $A\in M_{mxn}(K)$. Se llama rango de la matriz A, y se denota rg(A), al rango del conjunto de sus vectores fila en K^m, es decir, al número máximo de filas de A linealmente independientes. Se puede comprobar que este número coincide con el número máximo de columnas de linealmente independientes.

II. ÁLGEBRA DE MATRICES

II.1. EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES MXN

II.1.A. OPERACIONES

Definamos las siguientes operaciones con matrices:

■ **Suma**

Sean $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, dos matrices de dimensión mxn. Se define la suma de A y B, notándose A+B, como:

$$\begin{aligned} +: M_{mxn}(K)xM_{mxn}(K) &\to M_{mxn}(K) \\ (A,B) \quad &\mapsto \quad A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \end{aligned}$$

verificando las siguientes propiedades:

a) Conmutativa: $A+B=B+A \quad \forall A,B\in M_{mxn}(K)$.

b) Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C) \quad \forall A,B,C\in M_{mxn}(K)$.

c) Elemento neutro: $A+0=0+A=A \ \forall A\in M_{mxn}(K)$ (0 es la matriz nula de dimensión mxn)

d) Elemento simétrico: $\forall A\in M_{mxn}(K) \ \exists \ -A\in M_{mxn}(K)$ tal que $A+(-A)=(-A)+A=0$ donde $-A$ es la matriz opuesta de A.

Por tanto, $(M_{mxn}(K),+)$ es un grupo abeliano.

■ **Producto por un escalar**

Sean $A\in M_{mxn}(K)$, $\alpha\in K$. Si $A=(a_{ij})$, se define el producto de α por A como:

$$\begin{aligned} .: KxM_{mxn}(K) &\to M_{mxn}(K) \\ (\alpha, A) \quad &\mapsto \alpha A=\left(\alpha a_{ij}\right) \end{aligned}$$

y que verifica las siguientes propiedades:

a) Pseudoasociativa: $\alpha.(\beta.A)=\alpha.(\beta.A) \quad \forall \alpha,\beta\in K; \ \forall A\in M_{mxn}(K)$

b) Distributiva respecto de la suma de escalares:

$$(\alpha+\beta).A=\alpha A+\beta A \qquad \forall \alpha,\beta\in K; \ \forall A\in M_{mxn}(K)$$

c) Distributiva respecto de la suma de matrices:

$$\alpha.(A+B)=\alpha A+\alpha B \qquad \forall \alpha\in K; \ \forall A,B\in M_{mxn}(K)$$

e) Elemento unidad: $\exists 1\in K$ tal que $1.A=A \qquad \forall A\in M_{mxn}(K)$

Por tanto, el conjunto $M_{mxn}(K)$ de las matrices de orden mxn con coeficientes en K tiene estructura de **espacio vectorial** con las operaciones anteriores. Así, todos los resultados probados para los espacios vectoriales de dimensión finita son aplicables al conjunto $M_{mxn}(K)$.

Estudiemos a continuación una base especial para el espacio ($M_{mxn}(K)$,+,.)

II.1.B. BASE CANÓNICA

Sea la matriz $A=(a_{ij})$ de orden mxn. Sea E_{ij} una matriz de orden mxn en la que todos los elementos son nulos, excepto el elemento situado en la fila i, columna j, que es igual a 1.

El claro que el conjunto de estas mxn matrices E_{ij} engendran a $M_{mxn}(K)$, y además son linealmente independientes, pues:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = 0 \Leftrightarrow (a_{ij}) = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i,j$$

En consecuencia el conjunto $\{E_{ij}$: i=1,...,m; j=1,...,n$\}$ es una base de $M_{mxn}(K)$ llamada base canónica.

De aquí se deduce que la dimensión del espacio vectorial ($M_{mxn}(K)$,+,·) es justamente m·n.

II.2. EL ANILLO Y EL ÁLGEBRA DE $M_{MXN}(K)$

II.2.A. PRODUCTO DE MATRICES

Dadas dos matrices $A=(a_{ij})\in M_{mxn}(K)$, $B=(b_{jr})\in M_{nxr}(K)$, se define el producto de A y B como:

$$\cdot: M_{mxn}(K) x M_{nxr}(K) \to M_{mxr}(K)$$
$$(A,B) \qquad \mapsto A\cdot B=C=\left(c_{ij}\right) \quad \text{donde } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

que verifica las siguientes propiedades:

a) Asociativa: A.(B.C)=(A.B).C $\forall A\in M_{mxn}(K)$, $B\in M_{nxr}(K)$, $C\in M_{rxs}(K)$

b) Distributivas:

$$A(B+C)=AB+AC \quad \forall A\in M_{mxn}(K),\ B,C\in M_{nxr}(K)$$

$$(A+B)C=AC+BC \quad \forall A,B\in M_{mxn}(K)\ ,\ C\in M_{nxr}(K)$$

c) Elemento unidad: Si $A\in M_{mxn}(K)$, $A.I_n=A$, $I_m.A=A$, donde I_n, I_m son las matrices identidad de órdenes n y m respectivamente.

Notemos que para que esté definido el producto de matrices, el número de columnas de A tiene que coincidir con el número de filas de B. Por tanto, y en general, el producto de matrices no es conmutativo (si $m\neq r$, ni siquiera puede efectuarse el producto $B\cdot A$).

Con todo lo que tenemos hasta ahora podemos decir que el conjunto $M_n(K)$ de las matrices cuadradas de orden n, con la suma y el producto definidos, tiene *estructura de* ***anillo*** (no conmutativo en general).

Además, $M_n(K)$, provisto de las tres operaciones definidas, suma, producto, producto por escalares, tiene *estructura de* ***álgebra sobre K***.

Observación

Hemos visto que, en general, el producto de matrices no es conmutativo, ni siquiera cuando podemos garantizar que se puedan realizar ambos productos, como el caso $M_n(K)$. Sirva como ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ \text{ mientras que } B.A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Sin embargo, en el anillo $M_n(K)$ podemos asegurar que las únicas matrices de $M_n(K)$ que permutan con toda matriz de $M_n(K)$ son las matrices escalares, es decir las matrices de la forma αI_n, con $\alpha\in K$. Además estas matrices describen un subálbegra de $M_n(K)$ isomorfa a K.

Existen varias definiciones relacionadas con el producto de matrices como:

Una matriz cuadrada A se dice que es *idempotente*, *involutiva, nihilpotente* de orden $n\in\mathbb{N}$, si $A^2=A$, $A^2=I$, $A^n=0$ respectivamente.

Ahora que ya tenemos definido un producto veamos otros aspectos relacionados con él.

II.2.B.TRASPOSICIÓN DE MATRICES

Estudiemos algunas de las propiedades de la trasposición de matrices respecto de las operaciones definidas:

a) $(\alpha A)^t=\alpha A^t\quad \forall\alpha\in K;\ \forall A\in M_{mxn}(K)$

b) $(A+B)^t=A^t+B^t\quad \forall A,B\in M_{mxn}(K)$

c) $(A.B)^t=B^t.A^t\quad \forall A\in M_{mxn}(K)\ \text{ y }\ \forall B\in M_{nxr}(K)$

Su demostración es inmediata sin más que saber bien lo que significa cada cosa. De estas propiedades se deduce esta otra:

Proposición

Toda matriz cuadrada A se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

-Dem-

Veamos qué deben verificar S y H, en caso de existir, siendo A=S+H, con S simétrica y H antisimétrica.

$$\begin{cases} A^t = (S+H)^t = S^t + H^t = S - H \\ A = S + H \end{cases}$$

Sumando obtenemos que 2S=A+$A^{t,}$ con lo que $S = \dfrac{A + A^t}{2}$.

Restando se obtiene que 2H=A-A^t, con lo que $H = \dfrac{A - A^t}{2}$

Luego basta definir de este modo S y H para descomponer una matriz cuadrada como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. ■

II.2.C. ELEMENTOS INVERSIBLES DEL ANILLO $M_N(K)$.

Sea $A\in M_n(K)$. Se dice que A es una matriz regular si $\exists A^{-1}\in M_n(K)$ tal que $A.A^{-1}=A^{-1}A=I_n$.

Es inmediato que si $A,B\in M_n(K)$ son regulares, entonces A.B es regular y $(A.B)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

Así, el conjunto de las matrices regulares de orden n tiene, respecto del producto, estructura de grupo no conmutativo (la operación es interna por lo anterior, y además se comprueba que es asociativa, distributiva, elemento inverso, elemento neutro). Se define el *grupo lineal*, de orden n sobre K:

$$GL(n,K) = \{A \in M_n(K): \text{ A es regular}\}$$

Si $A\in M_n(K)$ tal que $A^{-1}=A^t$ entonces A recibe el nombre de *matriz ortogonal*. Dado que $(AB)^t=B^tA^t$, se tiene: $\left((AB)^t\right)^{-1} = \left(B^tA^t\right)^{-1} = \left(A^t\right)^{-1}\left(B^t\right)^{-1} = AB$ para cualesquiera matrices A y B ortogonales, es decir, si A y B son ortogonales AB también lo es. Luego el conjunto de las matrices ortogonales de orden n respecto del producto tiene estructura de grupo. Se define el grupo ortogonal de orden n sobre K como:

$$O(n,K)=\{A\in M_n(K):\ A^t=A^{-1}\}$$

Se verifica que O(n,K) es un subgrupo de GL(n,K).

Relacionado con las matrices regulares está el concepto de matrices equivalentes. Veámoslo.

Diremos que dos matrices A, $A'\in M_{mxn}$ son equivalentes (A~B) si existe una matriz regular $Q\in GL(m,K)$ y $P\in GL(n,K)$ tal que $A'=Q^{-1}AP$.

III. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

III.1. EXPRESIÓN MATRICIAL DE UNA APLICACIÓN LINEAL

Estudiemos ahora la relación existente entre las matrices y las aplicaciones lineales.

Sean $V(K)$ y $V'(K)$ dos espacios vectoriales y $f:V\to V'$ una aplicación lineal. Fijemos dos bases ordenadas $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ en V y $B'=\{e'_1,\ldots,e'_m\}$ en V'. Ya hemos demostrado que la aplicación f está completamente determinada (y de forma única) por las imágenes de los vectores de B, o sea, por las coordenadas de $f(e_j)$ en B', para $j=1,\ldots,n$.

Pongamos entonces $f(e_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e'_i$, $\forall j=1,\ldots,n$. Aparecen $m\cdot n$ escalares (los a_{ij}) que determinan unívocamente a f:

Si $x\in V$ es de la forma $x=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j$, tendremos que $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e'_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_{ij}\right)e'_i$, de modo que si $f(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda'_i e'_i$ entonces $\lambda'_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_{ij}$, $\forall_i=1,\ldots,m$

Estas m ecuaciones que nos determinan las coordenadas en B' de la imagen por f de cada vector de V, conocidas las coordenadas de éste en B y las coordenadas de las imágenes de los vectores de B en la base B', reciben el nombre de ecuaciones analíticas de f respecto de las bases B de V y B' de V'.

Matricialmente, podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_m \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$ *Expresión matricial de f respecto de B y B'*

Definición

Dada una aplicación lineal $f: V \to V'$ y dadas $B = \{e_1,\ldots,e_n\}$, $B' = \{e'_1,\ldots,e'_m\}$ bases ordenadas de V y V' respectivamente, se define la matriz de f respecto de las bases B de V y B´de V´, $M(f;B,B')$, por:

$$M(f;B,B') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$, para $j = 1,\ldots,n$

Notación: Denotaremos por $L(V,V')$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en V'

Así pues toda aplicación lineal tiene asociada una matriz. El siguiente teorema demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre aplicaciones y matrices:

Teorema

Sea V y V' espacios vectoriales, y fijemos las bases $B=\{e_1,...,e_n\}$ y $B'=\{e=_1,..,e=_m\}$ de V y V', respectivamente. Entonces la aplicación de espacios vectoriales:

$$\begin{array}{ccc} L(V,V') & \to & M_{mxn}(K) \\ f & \mapsto & M(f;B,B') \end{array}$$

es un isomorfismo.

-Dem-

Para demostrar que es un isomorfismo tengo que ver que es lineal y biyectiva.

Sean $M(f,B,B')=(a_{ij})$, y $M(g;B,B')=(b_{ij})$.

- Lineal

a) $(f+g)(e_j)=[\text{f y g lineales}]=f(e_j)+g(e_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i+\sum_{i=1}^{m} b_{ij}e'_i=\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})e'_i$

con lo que $M(f+g;B,B')=M(f;B,B')+M(g;B,B')$.

b) $(\lambda f)(e_j)=\lambda f(e_j)=\lambda\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i=\sum_{i=1}^{m}(\lambda a_{ij})e'_i$

con lo que $M(\lambda f;B,B')=\lambda M(f;B,B')$

- Biyectiva

Es consecuencia inmediata del teorema de existencia y unicidad de aplicaciones lineales que nos dice:

"Dados V y V' espacios vectoriales sobre K, con $B=\{e_1,...,e_n\}$ base de V y $\{x_1,...,x_n\}$ n vectores de V', entonces, existe una y solo una aplicación lineal tal que $f(e_1)=x_1,....,f(e_n)=x_n$." ■

Nótese que si f es un endomorfismo (V=V'), la matriz asociada a f es cuadrada. En general, se suele tomar la misma base para V al considerarlo como espacio original que como espacio imagen, y entonces se escribe: $M(f;B,B')=M(f,B)$

Estudiemos algunas propiedades más de la expresión matricial de las aplicaciones lineales.

Propiedades

1. Sean V, V' y V'' espacios vectoriales sobre K con B, B' y B'' bases respectivas de ellos. Sean $f\in L(V,V')$, $g\in L(V',V'')$, entonces:

$$M(g\circ f;B,B'')=M(g;B',B'').M(f;B,B')$$

2. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K con dimV=dimV', cuyas bases son B y B' respectivamente. Además sean $f\in L(V,V')$ y $A=M(f;B,B')\in M_n(K)$. Entonces, f es un isomorfismo si y solo si A es regular, en cuyo caso:

$$A^{-1}=M(f^{-1};B',B)$$

III.2. CAMBIO DE BASE

Una cuestión interesante que podemos plantearnos es la siguiente:

Dada una aplicación lineal $f: V \to V'$ y dadas bases ordenadas B de V y B' de V' tenemos definida M(f; B,B'). Si tomamos otras dos bases ordenadas $\tilde{B}$ de V y $\tilde{B}'$ de V' tendremos $M(f; \tilde{B},\tilde{B}')$. ¿Existirá alguna relación entre estas dos matrices?.

Es natural preguntarse que si $f \in L(V,V')$ y B, $\tilde{B}$ son bases de V, y B', $\tilde{B}'$ son bases de V', existe alguna relación entre M(f;B,B') y $M(f; \tilde{B},\tilde{B}')$. Veamos que sí:

Proposición

En las condiciones enunciadas antes se tiene que:

$$M(f; \tilde{B},\tilde{B}')=Q^{-1}.M(f;B,B').P$$

donde $P=M(Id; \tilde{B},B)$ y $Q=M(Id; \tilde{B}',B')$ llamadas matrices de cambio de base en V y V' respectivamente.

-Dem-

Consideremos el siguiente esquema:

$$V \xrightarrow{Id_V} V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{Id_{V'}} V'$$

$$\tilde{B} \quad \mapsto \quad B \quad \mapsto \quad B' \quad \mapsto \quad \tilde{B}'$$

Como $f=Id_{V'} \circ f \circ Id_V$ se tiene que

$$M(f;\tilde{B},\tilde{B}')=M(Id_{V'} \circ f \circ Id_V;\tilde{B},\tilde{B}') = M(Id_{V'};B',\tilde{B}').M(f;B,B').M(Id_V;\tilde{B},B) =$$

$$= Q^{-1}.M(f;B,B').P$$

■

Este resultado nos dice que matrices que representan a una misma aplicación lineal son equivalentes. Recíprocamente, se puede probar que dos matrices equivalentes cualesquiera representan a la misma aplicación lineal.

Para finalizar este apartado veremos un resultado que relacionará dos conceptos vistos, el de rango y el de regularidad.

Teorema

Sea $P \in M_n(K)$. Entonces:

P es regular si y solo si rangoP=n

-Dem-

Sea V un espacio vectorial con dimV=n, B={e_1,...,e_n} una base de V. Sea $f: V \to V$ la aplicación definida por P, entonces:

P es regular si, y solo si, f es un isomorfismo, si y solo si {$f(e_1)$,...,$f(e_n)$} es base de V, si y solo si {$f(e_1)$,...,$f(e_n)$} son l.i. si y solo si rgP=n. ■

IV. APLICACIONES AL CAMPO DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA NATURALEZA

Como ya he comentado las matrices tienen multitud de aplicaciones. Veremos algunas de las interesantes y llamativas que aparecen en las ciencias sociales y de la naturaleza.

IV.1. ESTABLECIENDO UN NUDO DE CONEXIONES

En sociología se utilizan grafos dirigidos para estudiar las relaciones entre un grupo grande de personas y a su vez se utilizan matrices para estudiar los grafos. Veamos un ejemplo esto:

Cinco radioaficionados desean establecer una comunicación entre ellos. Restricciones en la comunicación hacen que no se pueda establecer comunicación directa entre todos ellos. Concretamente el primer radioaficionado sólo puede transmitir sus mensajes al segundo y al cuarto, el segundo lo puede hacer al primero y al quinto, el tercero puede mandar mensajes solo al primero, el cuarto puede emitir mensajes al primero y al quinto y éste sólo lo puede hacer al tercero. En estas circunstancias se desea saber el número mínimo de comunicaciones para que cualquier radioaficionado pueda recibir un mensaje enviado por cualquiera de los restantes.

Podemos asociar a la red de comunicaciones la matriz de orden 5x5 siguiente: $a_{ij}=1$ si el radioaficionado i puede emitir mensajes al radioaficionado j, $a_{ij}=0$, en caso contrario.

Por tanto la matriz A asociada a la red es: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La solución a nuestro problema es el siguiente:

Este problema está íntimamente ligado a la teoría de grafos. Según esta teoría los elementos b_{ij} de la matriz A^2 representan el número de posibilidades de que el radio aficionado j reciba mensajes del radioaficionado i en 2 etapas.

Los elementos de cualquier potencia de la matriz A son números positivos o 0 y por tanto la solución al problema será el menor número k tal que la matriz $A+A^2+....+A^k$ tenga todos sus elementos positivos, salvo posiblemente los de la diagonal principal.

En mi caso resulta que $A+A^2+A^3$ verifica lo anterior, y por tanto tres comunicaciones son suficiente para que un mensaje transmitido por uno de los miembros de la red llegue a cualquier otro.

IV.2. MATRICES DE TRANSICIÓN

Multitud de situaciones, tales como las hábitos de los votantes, la evolución de una población, la trasmisión de genes, la posición de un punto en el espacio, determinados procesos probabilísticos, etc, cambian de estado según una reglas determinadas. En algunos casos estas reglas pueden expresarse por medio de matrices.

Suponiendo entonces que el estado n de un determinado proceso pueda expresarse por el vector X_n, con un número de coordenadas adecuado al caso que se esté analizando, el vector correspondiente al estado n+1 viene dado por $X_{n+1}=AX_n$ siendo A una matriz cuadrada del mismo orden que el número de componentes de los vectores de estado y se denomina matriz de transición.

La situación más usual, aunque no la única, es que A sea una matriz estocástica. (Una matriz estocástica es aquella en la que todos sus elementos son positivos o nulos y la suma de todas sus filas o columnas es 1).

Veamos un ejemplo: En un país bipartidista, cuyos partidos los designaremos por halcones (H) y palomas (P) los hábitos de los votantes son los siguientes: Las tres quintas partes de los votantes de H, en la siguiente elección vuelven a votar a H, la quinta parte vota a P y la quinta parte se obtiene. Las tres quintas partes de los de P vuelven a votar a P, una quinta parte vota a H y la otra quinta parte se abstiene. De los que se abstienen en una elección, en la siguiente las tres quintas partes votan a P, una quinta parte a H y el resto se abstiene. En las últimas elecciones el partido H obtuvo el 60% de los votos y P el 30%. ¿Cuándo gobernará P por primera vez?

Consideramos el vector $x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ siendo a_n, b_n, c_n los porcentajes de votantes del partido H, P y obtenciones respectivamente, en la elección n. El vector inicial es $x_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix}$. El proceso de votación se rige por la regla $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix} X_n = A.X_n$.

Haciendo varias iteraciones obtenemos que en la segunda iteración el porcentaje de votantes de P es mayor que los de H.

También puedo aplicar este tipo de problemas a la naturaleza. Por ejemplo, en un cierto hábitat la relación entre el número de conejos y águilas en dos períodos consecutivos viene dado por: $\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2v_n + \frac{1}{3}u_n \end{cases}$ siendo u_n el número de conejos en el período n, y v_n el de águilas en el período n.

Si en periodo inicial n=0 existen u_0 conejos y v_0 águilas, la forma de hallar la población de conejos y águilas en el período n+1 es la misma que en el ejemplo anterior.

IV.3. MATRIZ ASOCIADA A UN TRUEQUE

El conjunto de las actividades económicas de una nación, o las relaciones profesionales que mantienen varios individuos, pueden recogerse con todo detalle en una matriz que representa las transacciones comerciales entre los distintos sectores de su economía, o individuos.

Veamos un ejemplo:

Cuatro amigos de profesiones pintor (1), fontanero (2), carpintero (3) y electricista (4) deciden hacer reparaciones en sus respectivas casas. Todos trabajarán en las casas de todos si necesitasen sus servicios. Consideran que el estado de conservación de todas las casas es similar y por ello deciden que no se cobrarán los servicios entre sí. Todos trabajarán 20 días incluyendo los que trabajan en su propia casa, de acuerdo a la siguiente tabla: (a_{32}= nº de días que trabaja 3 (el carpintero en casa de 2 (el fontanero))

PROFESIONES				
Nº días	P	F	C	E
P	5	3	6	4
F	5	7	4	6
C	5	a_{32}= 6	8	6
E	5	4	2	4

¿Cual de los trabajos está más valorado?

Sean p, f, c, e los sueldos, ficticios en este caso, del pintor, fontanero, carpintero y electricista respectivamente. La solución del problema se reduce a resolver el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene al igualar lo que recibe cada uno de ellos por su trabajo y lo que paga por las reparaciones que hacen en sus casa. Dicho sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 20p = 5p + 3f + 6c + 4e \\ 20f = 5p + 7f + 4c + 6e \\ 20c = 5p + 6f + 8c + 6e \\ 20e = 5p + 4f + 2c + 4e \end{cases} \quad \text{equivalentemente} \quad \begin{pmatrix} -15 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & -13 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & -12 & 6 \\ 5 & 4 & 2 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ f \\ c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución distinta de la trivial, ya que la matriz de coeficientes tiene determinante cero, pues la suma de todas sus filas es cero. Resolviendo el sistema se obtiene que p=300k, f=353k, c=418k, e=234k, $k\in\mathbb{R}$. Por tanto a la vista de la solución el trabajo más valorado es el del carpintero.

Nota: Problemas de este tipo se conocen con el nombre de modelos económicos de Leontief cerrados, ya que no hay demanda externa. Si existiera dicha demanda el modelo de Leontief se denomina abierto y el sistema de ecuaciones resultante es no homogéneo.

IV.4. UNA MATRIZ PARA DESCIFRAR

Transmitir mensajes cifrados, que sólo pueden ser descifrados, a priori, por las personas que conocen la clave, ha sido una constante a lo largo de la historia. El procedimiento que expongo para enviar en mensaje cifrado se basa en conocer una matriz A de números enteros (por comodidad con det +1, o -1), que llamaremos la "clave del código" y asigna a cada letra un número. La asignación que haremos será a cada letra le asignaremos el número del lugar que ocupa en el abecedario. Así $a \equiv 0$, ...,$z \equiv 26$, etc. (Supondremos que los mensajes solo contienen caracteres alfabéticos).

Si a lo largo del proceso de transmisión, aparecen números distintos a 0,...,26 se reducen a ellos utilizando la aritmética de clase de restos en $\mathbb{Z}_{27}$. Obviamente el emisor y el receptor saben la "clave código" y la asignación de cada letra a un número.

Para transmitir un mensaje se efectúan los siguientes pasos:

1) Las N_0 letras del mensaje se traducen a través de la tabla de asignación a sus números equivalentes, obteniendose entonces N_0 números.

2) Los N_0 números se dividen en h vectores X_j, j=1,2,...,h cuyo número de componentes coincide con el orden n de la matriz a, clave del código. En caso de no ser exacto el cociente N_0/n las componentes que faltan para completar el último vector se rellenan con números arbitrarios del 0 al 26.

3) Se efectúan los operaciones AX_j j=1,..,h.

4) Los números obtenidos en los vectores $Y_j=AX_j$ se "trasladan", utilizando las clases residuales en $\mathbb{Z}/27$ a 0,1,..,26. Posteriormente dichos números se convierten en letras a través de la asignación de números letras. Estas letras son el mensaje que se debe transmitir.

Para descifrar el mensaje se efectúan los siguientes pasos.

1) Las cifras recibidas se convierten en números mediante la asignación .

2) Estos números se dividen en h vectores de orden n Z_j, j=1,..,h.

3) Se efectúan las operaciones $A_{-1}Z_j$. Los números obtenidos en los vectores $S_j=A^{-1}Z_j$, j=1,..,h se "reducen" a 0,...,26.

4) Cambiando dichos números por su letras equivalentes se descifra el mensaje.

Hay que terminar el tema con un párrafo que sirva de conclusión y que el tribunal vea que es realmente una conclusión. En las últimas convocatorias de oposiciones se valora positivamente una buena conclusión. Se pueden mencionar aspectos prácticos y didácticos del tema, cómo llevarlo al aula y se puede anotar alguna ventaja o dificultad relacionado con la docencia mucho mejor. Si no se puede por la naturaleza del tema (algunos son tan específicos que no se imparten de ningún modo en la materia de Matemáticas), se termina con un resumen de los aspectos más destacados del tema o a las aplicaciones que el tema puede tener. No repitas lo que ya dijiste en la introducción. ESTE PÁRRAFO DE CONCLUSIÓN CONVIENE QUE LO ELABORES TÚ Y LO ADAPTES A TU COMUNIDAD Y SEA DISTINTO DE LA CONCLUSIÓN DE CUALQUIER OTRO ASPIRANTE QUE SE PRESENTE EN TU MISMO TRIBUNAL. Podría hacerse con frases del tipo:

"Hemos llegado al final del tema y me gustaría destacar a modo de conclusión ...."

Recuerda que la conclusión no debe ser muy extensa.

V. BIBLIOGRAFÍA

■ Arvesú, J., Álvarez R. y Marcellán F. **Álgebra lineal y aplicaciones**. Ed. Síntesis, 1999

■ Burgos, J. **Álgebra lineal**. MacGraw-Hill, 1993

■ Castellet, M. y Llerena, I. **Álgebra lineal y Geometría**. Ed, Reverte, 1981

■ Greub, W. **Linear Algebra. Springer-Verlag**, 1981

■ Merino, L y Santos, E. **Álgebra lineal con métodos elementales**. Ed. Thomson, 2006

■ Raya, A., Rider, A. y Rubio, R. **Álgebra lineal y Geometría**. Ed. Reverte, 2007

■ Romero, A. **Álgebra lineal y Geometría I**. Ed. La Madraza, 1991