TEMA 9: NÚMEROS COMPLEJOS. APLICACIONES GEOMÉTRICAS.

TEMA 9: NÚMEROS COMPLEJOS. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

La historia de las matemáticas ha sido testigo de una encarnizada lucha entre los defensores y enemigos de los números "imaginarios", cuyo origen está en el intento de encontrar soluciones a ecuaciones algebraicas como $x^2+1=0$, que no admiten solución en $\mathbb{R}$.

La solución a este problema fue introducir el símbolo i, dado por la igualdad $i^2=-1$. Este objeto "i", unidad imaginaria, no tiene nada que ver con el concepto de número tal y como se conocía hasta entonces.

Los números imaginarios permanecieron en un nivel puramente formal hasta el s. XIX, en el que los matemáticos Gauss y Hamilton, independientemente y al mismo tiempo, dieron una interpretación matemática a los números complejos al identificarlos con pares de números reales, dando pie así a la construcción axiomática del cuerpo de los números complejos. Pasemos a estudiarlos. Para ello seguiré el esquema expuesto anteriormente.

I. NÚMEROS COMPLEJOS

Deseamos ampliar el cuerpo de los números reales de tal modo, que el nuevo cuerpo contenga un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$, y en donde la ecuación $x^2+1=0$ tenga solución.

I.1. PLANO COMPLEJO

En $\mathbb{R}^2$, las operaciones:

$$\begin{cases}(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b') \\ \lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)\end{cases} \qquad \forall(a,b),(a',b')\in\mathbb{R}^2 \ \text{ y } \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

lo dotan de estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 2. Consideremos el grupo abeliano $(\mathbb{R}^2,+)$, y definamos el producto $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$.

Sin dificultad se comprueba que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo, en el cual:

- (0,0) es el elemento neutro aditivo
- (1,0) es el neutro multiplicativo
- Si z=(a,b) entonces -z=(-a,-b)

- Si $z=(a,b)\neq(0,0)$ entonces $z^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

A este cuerpo se le llama el **cuerpo de los números complejos**. En lo sucesivo se notará por $\mathbb{C}$, y a sus elementos los llamaremos números complejos.

Nota: La diferencia entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ es cuestión de matiz. $\mathbb{R}^2$ lo vemos como un espacio vectorial real 2-dimensional y $\mathbb{C}$ como un cuerpo conmutativo. Como conjuntos son idénticos.

I.1.A. INMERSIÓN DE $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{C}$

Veamos que este cuerpo es el que buscamos:

Si consideramos la aplicación:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}&\to\mathbb{C}\\ a&\mapsto(a,0)\end{aligned}$$

se comprueba inmediatamente que es un monomorfismo de cuerpos. Así pues, $\mathbb{R}$ es isomorfo a un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Podemos considerar por tanto $\mathbb{R}=\{(x,0):\ x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{C}$ con la identificación $a=(a,0)\ \forall a\in\mathbb{R}$.

Además la estructura de cuerpo de $\mathbb{R}$ se mantiene viéndolo como subconjunto de $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases}(a,0)+(b,0)=(a+b,0)\\ (a,0).(b,0)=(ab,0)\\ -(a,0)=(-a,0)\\ \text{Si } a\neq 0,\ (a,0)^{-1}=(a^{-1},0)\end{cases}\qquad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

I.1.B. UNIDAD IMAGINARIA

Consideremos ahora $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial. Una base de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto {(1,0),(0,1)}. Así cada número complejo (a,b) se expresa de forma única como: (a,b)=a(1,0)+b(0,1).

En lo sucesivo denotaremos $(0,1)\equiv i$, $(1,0)\equiv 1$. Además se verifica que $i^2=(0,1)(0,1)=-1$.

En virtud de esto, si $z\in\mathbb{C}$, entonces lo podemos escribir como z=a+bi de forma única, en donde $a,b\in\mathbb{R}$. **"i"** recibe el nombre de **unidad imaginaria**, "a" el de **parte real** de z, y "b" **parte imaginaria** de z. (a=Re z y b=Im z)

Cuando un número complejo lo expresemos de la forma z=a+bi con $a,b\in\mathbb{R}$ diremos que está en **forma binómica**.

Un número se dice que es **imaginario puro** si su parte real es cero.

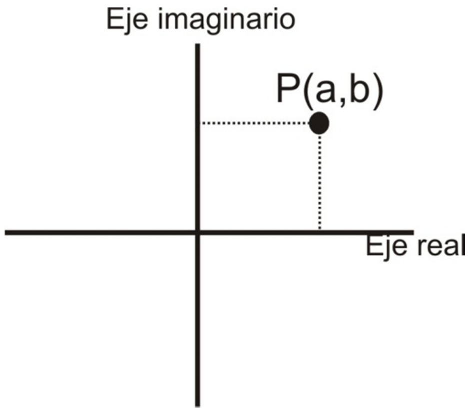
Observación: Si nos damos cuenta i,-i son las soluciones de $x^2+1=0$.

I.1.C. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Podemos representar geométricamente los números complejos. A cada número complejo z=a+bi, podemos hacerle corresponder el punto P del plano cartesiano de coordenadas P=(a,b).

De esta forma a todo número complejo z le corresponde de manera biunívoca un punto del plano cartesiano al que llamaremos *afijo*.

Mediante esta aplicación, los números complejos de la forma a+0i se corresponden de manera biunívoca con el eje 0X, al que llamaremos *eje real*. De igual manera, los números de la forma 0+bi se corresponden de forma biunívoca con los puntos del eje 0Y, al que llamaremos *eje imaginario*.



I.1.D. ORDEN EN $\mathbb{C}$. IMPOSIBILIDAD DE UN ORDEN TOTAL

En $\mathbb{C}$, podemos definir varias relaciones de orden; por ejemplo:

$$\begin{cases}(a+bi)\leq(c+di)\Leftrightarrow a\leq c \;\text{ y }\, b\leq d\\(a+bi)\leq(c+di)\Leftrightarrow a\leq c \;\text{ y }\, b\leq c\end{cases}$$

Puede demostrarse sin dificultad, que las dos relaciones definidas verifican las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva, pero sin embargo ninguna de las dos es una relación de orden total. (Compruébese con z=3+7i y z==5+2i).

Justifiquemos que no es posible definir una relación de orden total < en $\mathbb{C}$.

En caso de que exista una relación de orden total en $\mathbb{C}$ tiene que cumplir las siguientes propiedades:

a) Se verifica una y sólo una de las siguientes cosas:

$$z=z' \text{ ó } z<z' \text{ ó } z'<z \quad \forall z,z'\in\mathbb{C}.$$

b) Si $z<z'$, entonces $z+w<z'+w \quad \forall w \in \mathbb{C}$.

c) Si $z>0$ y $z'>0$, entonces $zz'>0$.

Como estamos suponiendo que existe un orden total en $\mathbb{C}$, e $i \neq 0$, se debería tener $i<0$ ó $i>0$.

Suponiendo que $i>0$ obtendríamos, tomando $z=z'=i$ en c), que $i^2=-1>0$, con lo que $1<0$.

Por otro lado, aplicando de nuevo c) esta vez a $z=z'=-1$ (sabemos que $-1>0$), obtendríamos $1>0$, lo que contradice a).

Razonando de forma análoga si suponemos que $i<0$ llegaríamos también a contradicción.

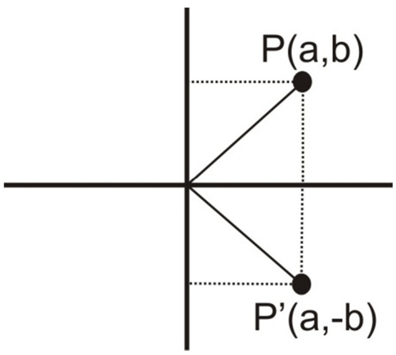
Por tanto no podemos definir un orden total en $\mathbb{C}$.

I.2. CONJUGADO Y MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Vamos a estudiar ahora dos conceptos nuevos fundamentales en la teoría de los números complejos: el conjugado y el módulo de un complejo.

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se define el ***conjugado*** de z como $\overline{z} = a - bi \in \mathbb{C}$.

Examinemos la aplicación que asocia a cada número complejo su conjugado asociado. Geométricamente, se reduce a la reflexión del plano complejo con relación al eje real.



donde P y P' son los afijos de z=a+bi y respectivamente.

Es fácil comprobar las siguientes propiedades:

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

iii) Si $z \neq 0$ entonces $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

iv) $\overline{\overline{z}} = z$

Las propiedades i) y ii) nos permiten afirmar que la conjugación $z \mapsto \overline{z}$ es un endomorfismo de cuerpos.

La propiedad iv) nos permite deducir que la conjugación es inyectiva ya que si $\overline{z} = \overline{w} \Rightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{\overline{w}} \Rightarrow z = w$.

Como la conjugación es trivialmente sobreyectiva, se tiene que la conjugación es un automorfismo de $\mathbb{C}$. Además deja invariantes a todos los números reales.

Se define ***módulo*** de un número complejo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ al número real no negativo $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

La interpretación geométrica de $|z|$ es clara, es la distancia al origen del punto P=(a,b) (afijo del complejo z=a+bi) del plano coordenado. Por tanto el concepto de módulo de un complejo se corresponde con el concepto de módulo de un vector.

La aplicación módulo verifica:

i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ii) $|z| = |\overline{z}|$

iii) $|z.w| = |z||w|$

iv) $\operatorname{Max}\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \le |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

v) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right)$ $\qquad \forall z,w \in \mathbb{C}$

vi) Desigualdad triangular $|z + w| \le |z| + |w|$

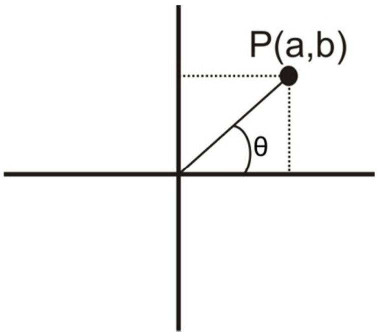
vii) $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$

viii) $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|}$

<u>Nota:</u> La topología de $\mathbb{C}$ no es más que la topología usual de $\mathbb{R}^2$, o sea la asociada a la distancia euclidea: $\forall z,w \in \mathbb{C}$ d(z,w)=$|z - w|$.

I.3. ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

La posición del afijo (P) de un complejo $z \ne 0$ en el plano, queda totalmente determinada prefijando su distancia $|z|$ desde el origen de coordenadas hasta P, y al ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el semieje positivo $\overrightarrow{OX}$, tomando como sentido positivo el contrario al de avance de las agujas del reloj. El **argumento** de un número complejo $z = a + bi \ne 0$ es la medida de este ángulo. Lo denotaremos por Arg(z).



Luego el argumento de z queda determinado salvo un múltiplo de 2π, es decir, $\operatorname{Arg}(z)=\{\theta+2k\pi:\ k\in\mathbb{Z}\}$ donde θ es cualquier ángulo que defina la posición de z.

Llamaremos ***argumento principal*** de z, y lo denotaremos por arg(z), al único elemento de Argz que cumple la condición $-\pi<\arg(z)\leq\pi$.

Se puede demostrar que si $z\in\mathbb{C}^*$:

$$\arg(z)=\begin{cases}\pi & \text{si } z\in\mathbb{R}^- \\ 2\operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im}z}{|z|+\operatorname{Re}z} & \text{si } z\in\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-\end{cases}$$

Notar que para z=0 el argumento no está definido.

Sea z=a+bi es un complejo distinto de cero. Puesto que a=|z|cosθ, y b=|z|senθ con θ argumento principal de z, entonces z=|z|(cosθ+isenθ). Esta expresión recibe el nombre de ***expresión trigonométrica***. (Para cualquier elemento otro argumento de z que no se a el principal).

El par (|z|,θ) o $|z|_\theta$ recibe el nombre de ***forma polar*** del complejo.

Señalemos algunas de las propiedades del conjunto de argumentos de un número complejo:

1) Si $z,w\in\mathbb{C}^*$, entonces Arg(zw)=Arg(z)+Arg(w).

Notar que esta igualdad no es cierta si en lugar de tomar todo el conjunto de argumentos, tomamos el argumento principal. Por ejemplo z=w=-1, se tiene que arg(z)=arg(w)=π pero en cambio arg(zw)=0.

2) Arg(z/w)=Arg(z)-Arg(w) $\forall z,w\in\mathbb{C}^*$.

3)Arg(z^n)=nArg(z)+2πZ

4) $\operatorname{Arg}(\overline{z})=-\operatorname{Arg}(z)$

I.4. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

De las distintas formas de expresar un número complejo que he visto, a la hora de operar utilizaré una u otra dependiendo de cual de ellas resulte más sencillo el algoritmo de la operación correspondiente.

■ **Suma**

Aunque la suma ya la vimos al comienzo del tema recordemósla:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \quad \text{con } a+bi,\ c+di \in \mathbb{C}.$$

■ **Producto**

Aunque ya vimos también el producto de complejos estudiemos el caso en el que los complejos vienen expresados en forma polar.

$$\begin{aligned} &r_\theta . s_{\theta'} = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta).s(\cos\theta' + i\text{sen}\theta') = \\ &rs\left(\cos\theta\cos\theta' - \text{sen}\theta\text{sen}\theta' + i(\text{sen}\theta\cos\theta' + \cos\theta\text{sen}\theta')\right) = \\ &rs\left(\cos(\theta+\theta') + i\text{sen}(\theta+\theta')\right) = rs_{\theta+\theta'} \end{aligned}$$

Por tanto el producto de dos números complejos, expresados en forma polar es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos

■ **Inverso**

Deduzcamos cuál es el inverso de un complejo expresado en forma polar.

Dado r_θ, busco $s_{\theta'}$ tal que $r_\theta . s_{\theta'} = 1_0$. Sabemos que $r_\theta . s_{\theta'} = rs_{\theta+\theta'} = 1_0$. Entonces:

$$\left.\begin{cases} rs = 1, \text{ por lo que } s = \dfrac{1}{r} \\ \theta + \theta' = 0, \text{ entonces } \theta' = -\theta \end{cases}\right\} \text{entonces } (r_\theta)^{-1} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\theta}$$

■ **Cociente**

De los resultados anteriores deducimos que: $\dfrac{r_\theta}{s_{\theta'}} = \left(\dfrac{r}{s}\right)_{\theta-\theta'}$

■ **Potencias de exponente entero**

Veamos que $\forall n \in \mathbb{Z},\ (r_\theta)^n = r^n_{n\theta}$. Distingamos casos:

- $\forall n \geq 0,\ (r_\theta)^n = \overset{n}{r_\theta \cdots\cdots r_\theta} =$ [definición del producto]$= r^n_{n\theta}$
- Si n=0, entonces $(r_\theta)^0 = 1$.
- Si n<0, entonces n=-n' con n'>0. $(r_\theta)^{-n'} = r^{n'}_{-n'\theta} = r^{\theta}_{n\theta}$

Así, $\forall n \in \mathbb{Z},\ (r_\theta)^n = r^n_{n\theta}$.

Expresado en forma trigonométrica tenemos:

$$\left(r\left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)\right)^n=r^n\left(\cos n\theta+i\operatorname{sen} n\theta\right)$$

conocida como fórmula de Moivre.

■ Raíces n-ésimas de un número complejo.

Sea $z=r_\theta$ un número complejo. Queremos encontrar los números complejos x_σ tales que satisfagan la igualdad $\left(x_\sigma\right)^n=r_\theta$, es decir $x_\sigma=\sqrt[n]{r_\theta}$.

$$\left(x_\sigma\right)^n=r_\theta \Leftrightarrow x^n_{n\sigma}=r_\theta \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^n=r \\ n\sigma=\theta+2k\pi \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[n]{r} \\ \sigma=\dfrac{\theta+2k\pi}{n} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

Por tanto, en principio obtendríamos infinitas raíces n-ésimas de z. Sin embargo, solo son distintas si damos a k los valores 0,1,2,...,n-1.

Así por ejemplo las raíces n-ésimas de la unidad son:

$$w_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}=e^{\frac{2k\pi i}{n}} \quad \text{con } k=0,1,...,n-1$$

<u>Definición</u> : Llamaremos *raíces primitivas* de orden n de la unidad, a las raíces n-ésimas que no son raíces de orden inferior.

Por ejemplo, las raíces cuartas de la unidad son 1, -1, i, -i, de las cuales solo i, -i son primitivas pues 1 y -1 son también raíces cuadradas.

Como consecuencias tenemos:

a) Las n raíces n-ésimas del número complejo $z=r_\theta$ tienen el mismo módulo, luego sus afijos están situados sobre puntos de una circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt[n]{r}$.

b) Los argumentos de dos raíces n-ésimas consecutivas se diferencian en un ángulo de $\dfrac{2\pi}{n}$.

c) Como consecuencia de a) y b) si unimos los afijos de las n raíces n-ésimas ($n\geq 3$) de un número complejo, obtenemos un polígono regular de n lados.

Si n=2, las raíces cuadradas son opuestas la una de la otra.

d) Las raíces n-ésimas de un número complejo no nulo pueden obtenerse también multiplicando una de ellas por las n raíces n-ésimas de la unidad. En efecto, si z' es una raíz n-ésima del complejo r_θ, el resto de las raíces z_k son tales que:

$$(z_k)^n = (z')^n = r_\theta \Rightarrow \frac{(z_k)^n}{(z')^n} = 1 \Rightarrow \frac{z_k}{z'} = \sqrt[n]{1} \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{1}\, z'$$

e) Si $n \geq 2$, la suma de las raíces n-ésimas de cualquier complejo cualquiera z es cero. Esto es así porque dichas raíces serían las soluciones de la ecuación $x^n = z$. Por las fórmulas de Cardano se que la suma de todas las raíces es -(coeficiente de x^{n-1}), es decir cero.

I.5. FUNCIONES COMPLEJAS

Nos podemos preguntar ahora si ciertas funciones definidas en $\mathbb{R}$ las puedo extender a $\mathbb{C}$. Estudiemos algunas de estas funciones. En todas ellas la función definida en $\mathbb{R}$ será un caso particular de la nueva definición en $\mathbb{C}$.

I.5.A. EXPONENCIAL COMPLEJA

Buscamos una aplicación en $\mathbb{C}$ que extienda a la exponencial real y que verifique las propiedades: $\begin{cases} e^0 = 1; \\ e^{z+w} = e^z e^w \end{cases} \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$.

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, la exponencial se define como $e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$ donde definimos $e^{bi} = \cos b + i\,\mathrm{sen}\, b$ (Fórmula de Euler).

Definimos pues $e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos b + i\,\mathrm{sen}\, b)$.

Con esta definición es fácil comprobar que si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:

a) Esta exponencial extiende a la exponencial real.

b) e^0=1

c) $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

d) $e^z \neq 0$

e) La exponencial es una función periódica de periodo 2πi.

f) $e^z = e^w \Leftrightarrow z - w = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

g) $e^z = 1 \Leftrightarrow$ z es múltiplo entero de 2πi.

h) $\left|e^{bi}\right| = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$

A partir de esta definición, es inmediato que todo complejo se puede expresar de la forma:

$$z = |z|.e^{i\theta}, \text{ donde } \theta = \arg z + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

I.5.B. FUNCIÓN LOGARITMO

Veamos como definimos el logaritmo.

Sea $z \in \mathbb{C}^*$ un número complejo dado. Buscamos los elementos $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $e^{\lambda}=z$. Diré que λ es un logaritmo (natural o neperiano) de z si verifica lo anterior.

Veamos que expresión toma el conjunto de logaritmos de z:

Sea $z=|z|_{\theta}$ y $\lambda=x+yi$ tal que $z=e^{\lambda}=e^{x+yi}=e^{x}(\cos y+i\,\text{sen}\,y)=|z|_{\theta}=|z|(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)$. Entonces:

$$\begin{cases} e^{x}=|z| \\ y=\theta+2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\text{Ln}|z| \\ y=\theta+2k\pi \quad \text{con } k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Por tanto definimos el conjunto de logaritmos de z como:

$$\text{Lg}z=\{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi):\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Llamaremos logaritmo principal de un complejo $z\neq 0$, y lo denotaremos por lg(z) al elemento de Lg(z) definido así: lg(z)=ln|z|+iarg(z).

Es fácil comprobar que si $z,w\in\mathbb{C}^*$ entonces Lg(zw)=Lg(z)+Log(w), aunque en general no es cierto que lg(zw)=lg(z)+lg(w).

I.5.C. POTENCIAS DE BASE COMPLEJA Y EXPONENTE COMPLEJO

Utilizando el logaritmo complejo podemos definir las potencias complejas de un número complejo.

Si $z\in\mathbb{C}^*$ y $w\in\mathbb{C}$, definimos $\left[z^{w}\right]=e^{w\text{Lg}z}$ como el conjunto de todas las potencias de base z y exponente w.

Llamaremos valor principal de la potencia de base z y exponente w a $z^{w}=e^{w\log z}$.

Es fácil comprobar que $\left[(zz')^{w}\right]=\left[z^{w}\right]\left[z'^{w}\right]$, aunque por la general no es verdad que $(zz')^{w}=z^{w}z'^{w}$

I.5.D. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\text{Definimos}\quad \begin{cases} \cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \text{sen}\,z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases} \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

Algunas de las propiedades de las funciones trigonométricas son:

1) Extienden a las funciones seno y coseno reales.

2) Son funciones periódicas de periodo 2π (ya que la exponencial tiene período $2\pi i$).

3) $\begin{cases} \cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \\ \operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w \end{cases} \quad \forall z,w \in \mathbb{C}$

4) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

5) $\begin{cases} \cos(-z) = \cos z \\ \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

6) $\begin{cases} \cos z = 0 \\ \operatorname{sen} z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ z = k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$

7) El seno y el coseno no están acotados en $\mathbb{C}$.

A partir del seno y del coseno se definen las demás funciones trigonométricas (tg, cotg, sec, cosec) igual que en $\mathbb{R}$.

I.5.E. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Se definen las funciones hiperbólicas como: $\begin{cases} \operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \end{cases}$

II. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Las aplicaciones mas notables de los números complejos radican fundamentalmente en el estudio de ciertas transformaciones geométricas, como pueden ser las traslaciones, giros, etc. Pasemos a estudiarlas.

II.1. TRASLACIONES

Inherente a todo espacio vectorial es el concepto de traslación. La operación suma, respecto de la cual el espacio vectorial es un grupo abeliano, permite asociar a cada vector una traslación.

Sea $a \in \mathbb{C}$. La aplicación:

$$\begin{aligned} t_a : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z+a \end{aligned}$$

es una biyección de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ denominada ***traslación*** definida por el complejo a.

Se llama así por su significado geométrico. Si P es el afijo de z, entonces el afijo P' de $t_a(z)= z+a$, se obtiene sumando a P un representante del vector libre correspondiente al complejo a. Es decir, P' se obtiene trasladando P según el vector libre asociado al complejo "a".

Puede comprobarse que el conjunto de todas las traslaciones respecto de la operación composición ($t_a \circ t_b = t_{a+b}$) es un grupo abeliano isomorfo a ($\mathbb{C}$,+).

Podemos obtener unas ecuaciones para las traslaciones:

Si a=m+ni y z=x+yi, su trasladado z'=x'+y'i se obtiene así: x'+y'i=(m+ni)+(x+yi)=m+x+i(n+y), con lo que identificando las partes reales e imaginarias se obtiene que: $\begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases}$

Ejemplo:

Dado z=3+i hallar su trasladado por la traslación asociada a 2-i.
Aplicando las ecuaciones, el trasladado tiene por coordenadas: x'=3+2, y'=1-1=0, es decir el trasladado es z'=5.

II.2. GIROS

La transformación:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto c + (z - c)a \end{aligned}$$

donde $a=e^{\alpha i}$ es un número complejo de módulo 1 y $c \in \mathbb{C}$ (ambos prefijados previamente), recibe el nombre de ***giro de centro C(afijo de c) y ángulo α***.

Se llama así por su significado geométrico.

Veamos como se obtiene el punto P' (afijo de c+(z-c)a) a partir de P (afijo de z):

|z'-c|=|a||z-c|=1|z-c|=|z-c| luego z' dista de c lo mismo que z.

Arg(z'-c)=Arg((z-c)a)=Arga+Arg(z-c)=α+Arg(z-c) luego el ángulo que forma $\overrightarrow{CP}$ con $\overrightarrow{CP'}$ es α.

En resumen, P' es el girado de P en giro de centro C y ángulo α.

Observación: Si α=π y c=0, entonces f(z)=-z. Se obtiene así la *simetría central* como caso particular de un giro.

Al igual que las traslaciones podemos expresar los giros mediante ecuaciones. Su obtención es muy parecida a la de las traslaciones:

Si z=x+yi, c=m+ni y $f(z) = x' + y'i$ entonces:

$$\begin{cases} x' = m + (x - m)\cos\alpha - (y - n)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = n + (x - m)\operatorname{sen}\alpha + (y - n)\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - m \\ y' - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - m \\ y - n \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Obtener el transformado de -4+2i respecto el centro de giro (-1,1) y un ángulo de 2π/3.

Particularizando las ecuaciones anteriores para x=-4, y=2, m=-1, n=1, y α=2π/3, obtengo lo que quiero.

II.3. HOMOTECIA Y SEMEJANZA

- Fijado el número real $r \in \mathbb{R}^*$, y c=α+βi la transformación:

$$\begin{aligned} h_r(c) : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto c + r(z\text{-}c) \end{aligned}$$

es una biyección denominada ***homotecia de centro c y razón r***.

Tanto en este caso como en los restantes podríamos obtener las ecuaciones de la transformación de forma análoga a como lo hicimos en el caso de las traslaciones y giros obtenemos $\begin{cases} x' = \alpha + r(x-\alpha) \\ y' = \beta + r(y-\beta) \end{cases}$

- Dados dos números complejos k, b con $k \neq 0$, la transformación:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto kz + b \end{aligned}$$

recibe el nombre de ***semejanza***.

Observemos que esta transformación puede ponerse como composición de otras:

Como k puede expresarse de la forma $k=re^{i\alpha}$, el paso de z a su transformado puede hacer se así:

$$z \mapsto e^{i\alpha}z \mapsto r.e^{i\alpha}z \mapsto re^{i\alpha}z + b$$

es decir, es la composición de un giro de centro el origen y ángulo α, de una homotecia de centro el origen y razón r, y por último de una traslación definida por b.

Hay que terminar el tema con un párrafo que sirva de conclusión y que el tribunal vea que es realmente una conclusión. En las últimas convocatorias de oposiciones se valora positivamente una buena conclusión. Se pueden mencionar aspectos prácticos y didácticos del tema, cómo llevarlo al aula y se puede anotar alguna ventaja o dificultad relacionado con la docencia mucho mejor. Si no se puede por la naturaleza del tema (algunos son tan específicos que no se imparten de ningún modo en la materia de Matemáticas), se termina con un resumen de los aspectos más destacados del tema o a las aplicaciones que el tema puede tener. No repitas lo que ya dijiste en la introducción. ESTE PÁRRAFO DE CONCLUSIÓN CONVIENE QUE LO ELABORES TÚ Y LO ADAPTES A TU COMUNIDAD Y SEA DISTINTO DE LA CONCLUSIÓN DE CUALQUIER OTRO ASPIRANTE QUE SE PRESENTE EN TU MISMO TRIBUNAL. Podría hacerse con frases del tipo:

"Hemos llegado al final del tema y me gustaría destacar a modo de conclusión ...."

Recuerda que la conclusión no debe ser muy extensa.

III. BIBLIOGRAFÍA

■ Aparicio del Prado, C y Payá Albert, R. **Análisis matemático**. Universidad de Granada, 1996

■ Abbott, S. **Understanding Analysis**. Springer-Verlag, New York, 2001

■ M. de Guzmán, B. Rubio. **Análisis matemático**. Editorial Pirámide.

■ J.A. Fernández Viña. **Análisis matemático I.** Editorial Tecnos.